

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

GENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER
K. MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT
W. TOLLMIEHN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

BAND 41

SEITE T 1—T 192

SONDERHEFT

1961

INHALT:

Vorträge der Wissenschaftlichen Jahrestagung
der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und
Mechanik vom 4. bis 8. April 1961 in Würzburg



AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN

INHALT:

Berichte

- H. Heinrich: Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Würzburg (4.—8. April 1961)

Vorträge

A. Angewandte Mathematik

- J. Albrecht: Fehlerabschätzungen zu Relaxationsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- R. Albrecht: Ein Differenzenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems für Systeme halblinärer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung
- I. Babuška und M. Prager: Numerisch stabile Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben
- L. Berg: Nichtkommutative Operatorenrechnung
- H. Bialy: Optimale Parameterwahl bei einer Klasse von Iterationsverfahren
- W. Bollermann: Eine Fehlerabschätzung zu Eigenlösungen bei linearen Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen
- H. Brakhage: Bemerkungen zur numerischen Behandlung und Fehlerabschätzung bei singulären Integralgleichungen
- D. Daskalopoulos: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewisser Integrodifferentialgleichungen
- H. Ehrmann: Ein Existenzsatz für die Lösungen spezieller nichtlinearer Gleichungen mit Nebenbedingungen
- H. Eltermann: Lösung von linearen Gleichungen mit Hilfe der Minimalgleichung
- O. Emersleben: Das Selbstpotential eines tetraedrischen Bereichs eines gleichnamigen kubischen Raumgitters (Würfecktetraeder)
- J. Fadde: Die Berechnung der Knicklasten von Stäben mit stufenweise veränderlichem Trägheitsmoment mit Hilfe von programmgesteuerten elektronischen Rechenautomaten
- C. Frischmuth: Zur Auswertung von Luftbildpaaren mit veränderten Kammerkonstanten
- O. Götz: Eine Anwendung des Eindeutigkeitssatzes von Caran auf die Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen im Komplexen
- R. Klötzler: Über ein neues Kriterium in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale
- J. Kuntzmann: Neuere Entwicklungen der Methode von Runge und Kutta
- P. Lächli: Zur Behandlung schlecht konditionierter Systeme in der Ausgleichsrechnung
- R. Leis: Über die Randwertaufgaben des Außenraumes zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung
- V. Lovass-Nagy: Über die Anwendung der Matrizenrechnung auf Wärmeprobleme
- V. Lovass-Nagy: Über die Anwendung der Matrizenrechnung zur Ermittlung von Stoßspannungsverteilungen in Spulenwicklungen
- E.-A. Müller und K. Matschat: Über die Verwendung von Transformationsgruppen zur Gewinnung von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentialgleichungssysteme (mit Anwendungen auf die Gleichungen der Strömungsphysik)
- K. Nickel: Fehlerabschätzungs- und Eindeutigkeitssätze für Integro-Differentialgleichungen
- F. Nožicka: Die Fundamentalinvarianten einer Weltlinie in der Minkowskischen Mechanik
- S. Oberländer: Einige Bemerkungen zum exponentiellen Ausgleich
- G. Opitz: Zum Vergleich von Iterationsverfahren zur Gleichungsauflösung
- G. Patzelt: Fehleruntersuchungen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme durch elektronische Digitalrechner
- A. Pethö: Eine Matrixmethode zur Lösung der Anfangswertaufgaben linearer Differenzgleichungen
- A. Pignedoli: Über die mathematische Theorie der atomischen Reaktoren

- M. Ribaric: Streuung des Vektorfeldes an einem isotropischen Zentrum
- P. Sagirow: Eine obere Schranke für die Frequenzen periodischer Lösungen von nichtlinearen Differentialgleichungen
- J.W. Schmidt: Die Regula Falsi für Operatoren in Banachräumen
- A. Schubert: Ein Verfahren zur genäherten Tschebyscheff-Approximation durch Polynome
- W. Uhlmann: Eine Fehlerschätzung für das gewöhnliche Differenzenverfahren bei der Poissonschen Differentialgleichung
- W. Walter: Über die Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen
- H. Werner: Bemerkungen zur Tschebyscheffschen Approximation mit rationalen Funktionen
- W. Wetterling: Zur Anwendung des Newtonschen Iterationsverfahrens bei der numerischen Behandlung der Tschebyscheff-Approximation

B. Rechenmaschinen

- H. Ehlich und K. Zeller: Rundefehler bei der Lösung linearer Gleichungen
- H. Fischer und K. Zeller: Bernoullische Zahlen und Eulersche Konstante
- G. Hotz: Nichtsinguläre Schaltwerke
- R. Mannshardt: Behandlung von Approximationsproblemen mit einem elektronischen Analogrechner
- C. A. Petri: Zur strukturellen Entwicklung elektronischer Rechenanlagen
- H. Rohleder: Zum Ausmultiplizieren der Klammern beim Verfahren von Nelson

C. Allgemeine Mechanik und Elasto-Kinetik

- W. Biermann: Ausbreitung von Reziprozitäten bei orthotropen Platten
- F. Böhm: Über die Fahrstabilität des Personenkraftwagens
- G. Brinkmann: Über die Eigenfrequenzen von Kreiszylinderschalen bei verschiedenen Randbedingungen
- H. Büfeler: Der Spannungszustand in einem geschichteten Medium
- E. Giencke: Reihenansätze zur Lösung von Plattenproblemen
- G. Heinrich und K. Desoyer: Theorie dreidimensionaler Setzungenvorgänge in Tonschichten
- P. F. Jordan: Über die dünnwandige Torusschale unter Innendruck
- Th. Lehmann: Plastizitätsbedingung und Formänderungsgesetz bei großen plastischen Formänderungen mit Werkstoffverfestigung
- H. Leipholz: Eine neue Reihenentwicklung zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen des Typus $y^{(n)}(x) = f(x,y)$
- H. Lippmann: Charakteristiken theorie der verwindungsfreien axialsymmetrischen Umformung eines starrplastischen Körpers
- K. Magnus: Der selbsterregte und der parametererregte Schaukelschwinger
- O. Mahrenholtz und W. Johnson: Zur Theorie des Bimetall-Streifens
- Kh. Nasifia: Über die Konstruktion von Näherungslösungen für Segmente von dünnen, elastischen Kreisringplatten
- H. Neuber: Vollständige Plattentheorie
- D. Rašković: On small damped vibrations of some particular vibrating systems with dynamic and mixed constraints
- R. Reissig: Abschätzung von Übergangsprozessen
- W. Schnell: Die dünnwandige Kegelschale unter Axial- und Innendruck
- G. Sonntag: Beitrag zum Keil mit einem Moment an der Spitze
- W. Thielemann und F. J. Heinrichsbauer: Über das Nachbeulverhalten axialgedrückter orthotroper Zylinder endlicher Länge

Fortsetzung auf 3. Umschlagseite

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 41

Sonderheft

Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Würzburg (4.–8. April 1961)

Die wissenschaftlichen Jahrestagungen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) erfreuen sich von Jahr zu Jahr eines wachsenden Zuspruches. Die diesjährige fand vom 4.–8. April unter der örtlichen Tagungsleitung von Herrn Prof. Dr. FRIEDRICH SOMMER in Würzburg statt. Sie wurde von rund 500 aktiven Teilnehmern aus dem In- und Ausland und über 100 begleitenden Ehefrauen besucht und gehört damit und mit ihren 104 Vorträgen zu den bisher umfangreichsten GAMM-Tagungen überhaupt. Schon der Begrüßungsabend im Russischen Hof am Anreisetag zeigte eine außerordentlich rege Beteiligung. Eröffnet wurde die Tagung am Mittwoch, dem 5. 4., im Auditorium Maximum der Universität durch den Vorsitzenden der Gesellschaft, Herrn Prof. Dr. R. SAUER, München. Nach ihm begrüßten der Oberbürgermeister der gastgebenden Stadt, Herr Dr. ZIMMERER, der Rektor der Universität, Se. Magnifizenz Prof. Dr. KNETSCH als Hausherr und Frau Ministerialrätin IRMA HEINRICH als Vertreterin der bayrischen Landesregierung die Teilnehmer und wünschten der Tagung einen erfolgreichen Verlauf.

In der nun schon zur Tradition gewordenen Art und Weise gliederte sich der wissenschaftliche Teil der Tagung in die Hauptvorträge, zu denen die Tagungsleitung die Vortragenden besonders eingeladen hatte, und die Kurzvorträge, die, in die Sektionen

- A. Angewandte Mathematik
- B. Rechenmaschinen
- C. Allgemeine Mechanik und Elasto-Kinetik
- D. Strömungsmechanik
- E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
- F. Unternehmensforschung

aufgeteilt, in Parallelsitzungen gehalten wurden. Folgende Hauptvorträge fanden statt:

| | |
|--|---|
| E. STIEFEL (Zürich): | Altes und Neues über numerische Quadratur |
| H. P. KÜNZI (Zürich): | Der heutige Stand in der Theorie der nichtlinearen Programmierung |
| H. NEUBER (München): | Vollständige Plattentheorie |
| E. TRUCKENBRODT (München): | Strömungsmechanische Probleme bei Hyperschallgeschwindigkeiten |
| J. V. WEHAUSEN (Berkeley/Kalifornien): | Neuere Entwicklungen in der Theorie der Wasserwellen und einige Anwendungen |
| L. SCHMETTERER (Wien): | Die Anwendungen statistischer Methoden im Gebiet der Näherungsverfahren |
| J. KUNTZMANN (Grenoble): | Neuere Entwicklungen der Methode von RUNGE und KUTTA |
| CH. SALZMANN (Paris): | Les Tendances actuelles de la Recherche Opérationnelle dans l'industrie. |

Der vorgesehene Hauptvortrag von Herrn Prof. Dr. UNGER, Bonn, mußte wegen dessen Erkrankung leider ausfallen. Dankenswerterweise konnte ihn aber sein Mitarbeiter, Herrn Dipl.-Math. PETRI, vertreten und über das gleiche Thema „Zur strukturellen Entwicklung elektronischer Rechenanlagen“ berichten. Auszüge aus den Haupt- und Kurzvorträgen sind fast vollzählig in diesem Heft abgedruckt. Die Hauptvorträge der Herren STIEFEL und KÜNZI erscheinen ausführlich im Heft 10/11 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift.

In einer gemeinsam mit der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) durchgeführten Festveranstaltung fand am Nachmittag des 7. April die LUDWIG-PRANDTL-Gedächtnis-Vorlesung in Gestalt eines Vortrags von Herrn M. J. LIGHTHILL aus Farnborough „Technique for Rendering Approximate Solutions to Physical Problems Uniformly Valid“ statt.

Die von der Tagungsleitung mit viel Sorgfalt und großer Umsicht vorbereitete Tagung zeichnete sich durch zahlreiche gesellige Veranstaltungen aus, von denen hier der gastliche Empfang durch den Oberbürgermeister der Stadt Würzburg im Wenzelsaal des alten Rathauses, die anschließende Führung durch das festlich beleuchtete Mainfränkische Museum auf der Festung Marienberg mit dem berühmten Riemenschneidersaal und der in den Räumen der Mensa veranstaltete gesellige Abend hervorgehoben seien, auf dem die Gäste Gelegenheit zu gegenseitiger Aussprache hatten, darüber hinaus aber noch in launigster Weise durch den in Würzburg unter dem Namen „Hirsche Hanns“ oder „Markt-Bärbel“ bekannten Stadtrat, Herrn HANNS HIRSCH, unterhalten wurden. Den zahlreichen Teilnehmern an dem am Sonnabend, dem 8. April durchgeführten Tagesausflug werden das blühende Maintal und der gute Tropfen in Iphofen in angenehmster Erinnerung bleiben.

Der örtlichen Tagungsleitung, insbesondere Herrn Prof. Dr. SOMMER, gebührt für die hervorragende Durchführung dieser in jeder Hinsicht gelungenen Tagung der herzlichste Dank der GAMM und aller Tagungsteilnehmer.

Die ordentliche Hauptversammlung der GAMM wurde am Freitag, dem 7. April, in der üblichen Form durchgeführt. Ein ausführlicher Bericht darüber ist den Mitgliedern der Gesellschaft bereits zugegangen. Er enthält auch die ausführlichen Tagungsberichte der acht Fachausschüsse. Bei den satzungsgemäß durchgeführten Wahlen wurde anstelle von Herrn Prof. Dr. SAUER, München, der den Vorsitz nach dreijähriger Tätigkeit turnusmäßig abgegeben hat, Herr Prof. Dr. METTLER, Karlsruhe, gewählt. Der Geschäftsführer, Prof. Dr. Dr. L. COLLATZ, Hamburg, der 1. Kassenführer, Prof. Dr. WIEGHARDT, Hamburg, und die Kassenprüfer (die Herren Professoren Dr. REUTTER, Dr. SCHMETTERER, Dr. KRIENES und Dr. WEIGAND) wurden wiedergewählt. Aus dem wissenschaftlichen Ausschuß schieden planmäßig die Herrn Professoren Dr. MAGNUS, Dr. OSWATITSCH und Dr. SCHUBERT aus. Sie wurden ersetzt durch die Herren Professoren Dr. BUKOVICS, Dr. RÜDIGER und Dr. STIEFEL.

Die ständig steigende Mitgliederzahl der Gesellschaft betrug zum Zeitpunkt der Tagung 1249, etwa 25% der Mitglieder sind Ausländer. Für Neuaufnahmen ist künftig Herr Prof. Dr. FRIEDRICH SOMMER, Würzburg, Klinikstr. 6, Mathematisches Institut der Universität, zuständig.

Auf Grund einer gegenseitigen Vereinbarung werden die Deutsche Mathematiker Vereinigung (DMV) und die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) ihre Jahrestagungen 1962 gleichzeitig (vom 24.—28. April) und am gleichen (bisher noch nicht festgelegten) Ort abhalten.

Eine besonders verantwortungsvolle Aufgabe wächst der GAMM in den nächsten Jahren mit der Vorbereitung des elften Internationalen Mechanikkongresses, der 1964 in München stattfinden soll. Der Vorstandsrat der GAMM hat dazu ein Deutsches Organisationskomitee bestimmt, das aus folgenden Herren besteht:

1. Prof. Dr. GÖRTLER und Prof. Dr. TOLLMIE als Mitglieder des Internationalen Komitees,
2. dem Vorsitzenden der GAMM, Prof. Dr. METTLER, und seinem Stellvertreter, z. Zt. Prof. Dr. H. HEINRICH,
3. und den Münchner Professoren Dr. HEINHOLD, Dr. NEUBER, Dr. SAUER und Dr. TRUCKENBRODT, welche unmittelbar mit der technischen Vorbereitung und Durchführung des Kongresses zu tun haben.

H. HEINRICH

A. ANGEWANDTE MATHEMATIK

Fehlerabschätzungen zu Relaxationsverfahren
für lineare Gleichungssysteme

Von J. ALBRECHT

Bei den systematischen Relaxationsverfahren zur iterativen Auflösung linearer Gleichungssysteme mit hermiteschen, positiv definiten Koeffizientenmatrizen werden die jeweiligen Näherungen durch Korrekturen verbessert, die proportional zu den Defekten (Residuen) der Gleichungen sind. Günstigste Werte für den Relaxationsfaktor lassen sich nach den Theorien von YOUNG und ARMS-GATES-ZONDEK („Successive Overrelaxation“) und von GOLUB-VARGA („Chebyshev Semi-Iterative Method“) bestimmen.

Es wurde über Fehlerabschätzungen zu diesen Verfahren berichtet, die sich mit einfachen funktionalanalytischen Hilfsmitteln, nämlich den Axiomen über die Normen von Vektoren und Matrizen, herleiten lassen und auch die Beantwortung der Frage gestatten, wie man von der (geeignet gemessenen) Größe der Defekte auf die Größe der Fehler schließen kann.

Inzwischen ist ein ausführlicher Bericht erschienen: J. ALBRECHT, Fehlerabschätzungen bei Relaxationsverfahren zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme, Numerische Mathematik 3 (1961), S. 188—201.

Anschrift: Dr. JULIUS ALBRECHT, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67—69

Ein Differenzenverfahren zur Lösung des Anfangswertproblems
für Systeme halblinärer partieller Differentialgleichungen
erster Ordnung

Von RUDOLF ALBRECHT

Betrachtet werden Systeme von m halblinären partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$a_{ik}^0 \frac{\partial u^k}{\partial t} + a_{ik}^v(t, x) \frac{\partial u^k}{\partial x^v} = b_i(t, x, u) \quad \dots \quad (1),$$

$$i, k = 1, 2, \dots, m, v = 1, 2, \dots, n, u = (u^1, u^2, \dots, u^m), x = (x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Im Euklidischen Raum $T \times X^n$ der Punkte $(t, x^1, x^2, \dots, x^n)$ bezeichne \mathfrak{K} den Kegelstumpf $\sum_{v=1}^n (x^v)^2 - M(d-t)^2 \leq 0$, $0 \leq t \leq \delta < d$, $0 < \delta$, $0 < M$, \mathfrak{G} ein konvexes Gebiet, so daß $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, \mathfrak{X} das durch $\sum_{v=1}^n (x^v)^2 - M d^2 < c$, $0 < c$, gegebene Gebiet von X^n und \mathfrak{R}_0 die Kreisscheibe $\sum_{v=1}^n (x^v)^2 - M d^2 \leq 0$. Auf \mathfrak{X} seien die Funktionen $\bar{u}^k(x) \in C^1(\mathfrak{X})$, $k = 1, 2, \dots, m$, vorgegeben. Ferner sei $\mathfrak{U} = \{u \mid |u^k - \bar{u}^k(x)| < S, x \in \mathfrak{R}_0, k = 1, 2, \dots, m\}$, S eine Konstante, $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ und $\bar{\mathfrak{U}}$ die Abschließung von \mathfrak{U} . Das System (1) wird unter folgenden Voraussetzungen betrachtet: Die Konstanten a_{ik}^0 sind $\neq 0$, $\det(a_{ik}^0) \neq 0$,

$$a_{ik}^v(t, x) \in C^1(\mathfrak{G}), b_i(t, x, u) \in C^1(\mathfrak{G} \times \bar{\mathfrak{U}}), \sup_{\substack{(t, x) \in \mathfrak{G} \\ i, k = 1, 2, \dots, m}} \left\{ \sum_{v=1}^n (a_{ik}^v(t, x))^2 \right\} \leq (a_{ik}^0)^2 (1 + M).$$

Gesucht ist in \mathfrak{K} für $0 < t \leq \delta$ eine Lösung $u^k = u^k(t, x)$ von (1), so daß $\lim_{t \rightarrow 0+} u^k(t, x) = \bar{u}^k(x)$. Unter diesen Annahmen kann (1) geschrieben werden

$$a_{ik}^0 \left(\frac{du^k}{dt} \right)_{(i, k)} = b_i(t, x, u)$$

mit

$$\left(\frac{du^k}{dt} \right)_{(i, k)} = \frac{\partial u^k}{\partial t} + \frac{\partial u^k}{\partial x^v} \frac{a_{ik}^v(t, x)}{a_{ik}^0}.$$

Die Lösungen $x^v = x_{(i, k)}^v(t, \tau, \xi)$ der Systeme $dx^v/dt = a_{(i, k)}^v(t, x)/a_{(i, k)}^0$ durch den Aufpunkt (τ, ξ) heißen wir „Quasicharakteristiken“.

Teilen wir nun das Intervall $[0, \delta]$ in N gleiche Teile $t = \sigma h$, $h = \delta/N$, $\sigma = 0, 1, 2, \dots, N$, so nehmen wir für das gestellte Anfangswertproblem als Näherungslösung $U_N^k(t; x)$ aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a_{ik}^0(U_N^k(\tau; \xi) - U_N^k(\sigma, h; x_{(ij)}(\sigma h, \tau, \xi))) &= b_i(\sigma h, \xi, U_N(\sigma h; \xi))(\tau - \sigma h) \\ \text{für} \quad \sigma h < \tau \leq (\sigma + 1)h, \\ \text{bzw.} \quad U_N^k(0; \xi) &= \bar{u}^k(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2).$$

Die aus (2) erhaltenen Funktionen $U_N^k(\tau; \xi)$ des Aufpunkts (τ, ξ) sind auf \mathfrak{R} stetig und stetig nach den ξ differenzierbar. Zusammen mit W. URICH [1] wurde bewiesen: Hat das Anfangswertproblem auf \mathfrak{R} höchstens eine Lösung und sind die $\partial U_N^k(t; x)/\partial x^r$ bezüglich N gleichartig stetig, so konvergieren die $U_N^k(t; x)$ für $N \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen eine Lösung des Problems. Sind die a_{ik}^r konstant, die b_i unabhängig von den u^k und Polynome in den x^r und die \bar{u}^k Polynome in den x^r , dann sind die $\partial U_N^k(t; x)/\partial x^r$ auf \mathfrak{R} gleichartig stetig.

Das Verfahren läßt sich auf Systeme mit $a_{ik}^0(t, x)$, $\det(a_{ik}^0(t, x)) \neq 0$, $a_{ik}^r(t, x, u)$ sowie auf Anfangs-Randwertprobleme verallgemeinern (siehe [1]).

Literatur

- [1] R. ALBRECHT und W. URICH, Ein Differenzenverfahren zur näherungsweise Lösung des Anfangswertproblems für Systeme halblinärer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, Zeitsch. f. Num Math. 3 (1961), S. 131–146.

Anschrift: Dr. RUDOLF ALBRECHT, München 42, Senftenauerstr. 70

Numerisch stabile Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben

VON IVO BABUŠKA und MILAN PRAGER

Die prinzipiell einfachsten Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben für Differentialgleichungen mit Hilfe der Lösungsmethoden von Anfangsproblemen sind meistens, wegen ihres großen Verlustes an Dezimalstellen, für elliptische Gleichungen numerisch undurchführbar. Diese numerische Instabilität wird z. B. im Fall der Gleichung mit konstanten Koeffizienten durch die partikuläre Lösung e^{ax} , $a > 0$, hervorgerufen. Bei der Lösung der Gleichung, deren sämtlichen partikulären Lösungen von der Form $y_i(x) = e^{a_i x}$, $a_i < 0$, sind, kommt es zu keinen numerischen Instabilitäten. Die folgende Definition bemüht sich, der intuitiven Grundlage der Forderung, daß eine Gleichung numerisch stabil lösbar ist, Ausdruck zu verleihen.

Definition. Die Gleichung

$$y'(x) = f(x, y) \quad (1)$$

nennen wir auf $\langle a, b \rangle$ resp. (a, b) resp. $\langle a, b)$ resp. (a, b) für die Anfangsbedingungen $y(a) = y_0$ von links stabil, wenn zu jedem $\delta > 0$

1. eine ε -Umgebung $\Omega_{y_0, \varepsilon}$ derart existiert, daß für jedes $\lambda > 0$ und eine stetige Funktion $b(x)$, $|b(x)| < \varepsilon$, gerade eine einzige Lösung der Gleichung

$$y'(x) = \lambda(f(x, y) + b(x)) \quad (2)$$

mit den Anfangsbedingungen $y(a) = y_1 \in \Omega_{y_0, \varepsilon}$ und eine von λ und $b(x)$ unabhängige Konstante K so existiert, daß

$$|y(x)| \leq K \text{ resp. } \frac{K}{x-a} \text{ resp. } \frac{K}{b-x} \text{ resp. } \frac{K}{(x-a)(b-x)}$$

ist,

2. wenn $y_i(x)$ ($i = 1, 2$) die Lösungen der Gleichung (2) für die Funktion b_i und die Anfangsbedingungen $y_i(a) \in \Omega_{y_0, \varepsilon}$ sind, dann gilt

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \delta \text{ resp. } \frac{\delta}{x-a} \text{ resp. } \frac{\delta}{b-x} \text{ resp. } \frac{\delta}{(x-a)(b-x)}$$

unabhängig von λ . Ähnlich kann auch die Stabilität von rechts definiert werden.

Die numerische Ausrechnung der, in dem von uns angeführten Sinne, stabilen Gleichungen wurde an konkreten Beispielen erfolgreich durchgeführt.

Betrachten wir die Lösung der Gleichung

$$y''(x) - \sigma^2(x) y(x) = f(x) \quad \dots \quad (3)$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) - \beta_1 y'(a) = \gamma_1,$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \quad \dots \quad (4);$$

$\sigma^2(x)$, $f(x)$ sind auf $\langle a, b \rangle$ stetig, $0 < m < \sigma^2(x)$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $i = 1, 2$. Die Gleichung (3) ist weder von links noch rechts stabil. Der Gedanke, welcher unserer Methode zugrunde liegt, ist der, ob man die Lösung der Gleichung (3) mit den Randbedingungen (4) nicht auf eine schrittweise Lösung von Gleichungen, ev. auch nicht-linearer, bringen kann, welche entweder von links oder rechts stabil sind.

Satz. Es seien $a_i(x)$, $\psi_i(x)$, $\varphi_i(x)$, $g_i(x)$, $y_i(x)$, $i = 1, 2$ Funktionen mit stetigen ersten Ableitungen auf (a, b) . Es sei für $x \in (a, b)$

$$(-1)^i (a_i \psi_i \varphi_i' - a_i \varphi_i' \psi_i + 2 a_i' \varphi_i \psi_i) - a_i \varphi_i^2 - a_i' \psi_i^2 + a_i \psi_i^2 \sigma^2 = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (5),$$

$$(a_1 \psi_1^2 g_1' - a_1 \varphi_1 \psi_1 g_1 + 2 a_1' g_1 \psi_1^2) \psi_2^2 + \\ + (a_2 \psi_2^2 g_2' + a_2 \varphi_2 \psi_2 g_2 + 2 a_2' g_2 \psi_2^2) \psi_1^2 = f \psi_1^2 \psi_2^2, \quad \psi_1(x) > 0, \quad \varphi_1(x) > 0 \quad (6),$$

$$\psi_i y_i' - (-1)^i \varphi_i y_i = g_i \psi_i, \quad i = 1, 2 \quad \dots \quad (7).$$

Dann genügt die Funktion

$$y(x) = a_1(x) y_1(x) + a_2(x) y_2(x) \quad \dots \quad (8)$$

der Gleichung (3). Wenn außerdem φ_2 , ψ_2 , g_2 , a_2 auf $\langle a, b \rangle$ stetig sind und

$$\psi_2(a) = \beta_1 a_2(a), \quad \psi_2(a) = \alpha_1 a_2(a) - \beta_1 a_2'(a) \quad \dots \quad (9)$$

gilt und wenn außerdem noch die Funktionen y_i , a_i , $i = 1, 2$ mit ihren ersten Ableitungen auf $\langle a, b \rangle$ stetig sind und

$$\left. \begin{aligned} y_1(a) (\alpha_1 a_1(a) - \beta_1 a_1'(a)) - \beta_1 a_1(a) y_1'(a) - g_2(a) \psi_2(a) &= \gamma_1 \\ y_1(b) (\alpha_2 a_1(b) + \beta_2 a_1'(b)) + \beta_2 a_1(b) y_1'(b) + y_2(b) (\alpha_2 a_2(b) + \beta_2 a_2'(b) + \beta_2 a_2(b) y_2'(b)) &= \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

gilt, dann ist nach (8) $y(x)$ die Lösung des gegebenen Problems.

Wir deuten nur zwei wichtige spezielle Fälle an.

$$\text{I.} \quad a_1(x) \equiv 0, \quad a_2(x) \equiv 1,$$

$$\text{II.} \quad a_1(x) \equiv -1, \quad a_2(x) \equiv 1.$$

In beiden Fällen müssen wir die Fälle $\beta_1 = 0$ und $\beta_1 \neq 0$ unterscheiden. Beim numerischen Rechnen kann der Unterschied zwischen beiden Fällen $\beta_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$ in gewissem Maße verwischt werden. Wir führen die Lösung wegen Platzmangels nur für den Fall $\beta_1 = 0$ an.

I.

Von den Gleichungen (5) und (7) kommt offensichtlich nur die zweite in Betracht ($i = 2$). Wir setzen $\varphi_2(x) = \alpha_1$; ($\alpha_1 > 0$). Die Gleichung (5₂) geht in die Gleichung

$$\psi_2' + \frac{\sigma^2(x)}{\alpha_1} \psi_2^2 = \alpha_1 \quad \dots \quad (11)$$

über, und aus (9) folgt $\psi_2(a) = 0$.

Die Gleichung (11) ist für die gegebenen Anfangsbedingungen auf $\langle a, b \rangle$ von links stabil. Die Gleichung (6) geht nach Umformung ($z = g_2 \psi_2$) in die Gleichung

$$z' + z \frac{\sigma^2}{\alpha_1} \psi_2 = f \psi_2, \quad z(a) = -\gamma_1 \quad \dots \quad (12)$$

über. Die Gleichung ist auf $\langle a, b \rangle$ von links stabil. Die Gleichung (7) $i = 2$, geht in die Gleichung

$$\psi_2 y_2' - \alpha_1 y_2 = z, \quad y_2(b) = \frac{-\beta_2 z(b)}{\psi_2(b) (\alpha_2 + \beta_2) + \beta_2 \alpha_1} \quad \dots \quad (13)$$

über. Die Gleichung (13) ist auf $\langle a, b \rangle$ von rechts stabil. Nach (8) ist $y_2(x)$ die gesuchte Lösung.

Das hier angeführte Verfahren hängt eng mit der Arbeit von GELFAND und LOKUCIEVSKI zusammen (siehe [1] S. 387), in welcher der Fall $\beta_1 \neq 0$ studiert wird.

II.

Wir setzen nun $g_1 = g_2 = g$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \alpha_1$, $\psi_2(a) = 0$, $\psi_1(b) > 0$. Aus Gleichung (6) folgt

$$g = \frac{\int \psi_2}{\varphi_1 \psi_2 + \alpha_1}.$$

Die erste resp. zweite Gleichung (5) ist auf $\langle a, b \rangle$ resp. $\langle a, b \rangle$ von links resp. rechts stabil. Die erste resp. zweite Gleichung (7) ist für $y_1(a) = -\gamma_1$ resp.

$$y_2(b) = \frac{\psi_2(b) [\gamma_2 + y_1(b) (\alpha_2 - \beta_2 \varphi_1(b))]}{(\alpha_2 \psi_2(b) + \beta_2 \alpha_1)}$$

auf $\langle a, b \rangle$ von links resp. rechts stabil. Die Gleichung (8) ist dann die gesuchte Lösung.

Für das Gleichungssystem $y_i(x)$ sind die Vektoren σ ; ψ_i , φ_i Matrizen, was allgemein große Anforderungen an die Speicher der programmgesteuerten Rechenanlagen stellt. Die Funktionen (Matrizen) $\sigma(x)$ sind jedoch oft konstant, so daß die Funktionen (Matrizen) ψ_i , φ_i konstant gewählt werden können. Dadurch werden aber die Gleichungen (9) und (10) nicht erfüllt, aber (8) ist die Lösung der Gleichung (3), die Bedingungen (4) werden aber nicht erfüllt. Es ist jedoch möglich, so ein Iterationsverfahren zur Lösung der Gleichung (7) zu finden, welches gegen die gesuchte Lösung konvergiert. Für den Fall II ist die Konvergenz ordnungsmäßig schneller. Dieser Rechenvorgang ist von großer praktischer Bedeutung, denn mit Rücksicht auf die beschränkten Speichermöglichkeiten der Rechenanlagen lassen sich bei größeren Systemen die Matrizen σ und ψ_i , φ_i , wenn sie nicht konstant sind, nicht speichern. In diesem Fall, ist dann der Rechenvorgang II vor dem Rechenvorgang I wegen seiner ordnungsmäßig schnelleren Konvergenz zu bevorzugen.

Der angeführte Rechenvorgang kann auch auf Gleichungssysteme höherer Ordnung angewendet resp. übertragen werden. Man kann dieses Rechenverfahren auch für Differenzengleichungen bilden und es zur Lösung von Netzgleichungen bei der Lösung von biharmonischen Gleichungen auf einem Rechteck, oder zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch implizite Differenzenformeln etc. anwenden.

Das angeführte Verfahren kann auch auf allgemeinere Systeme linearer Gleichungen übertragen werden. Solche linearen Gleichungssysteme kommen in technischen Problemen sehr oft vor, z. B. bei der Berechnung von Rahmen und Rostproblemen.

Dieses Rechenverfahren ist praktisch auf programmgesteuerten Rechenanlagen und Differentialanalysatoren in einigen konkreten Fällen erfolgreich durchgeführt worden.

Literatur

[1] И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений II, Москва 1959.

Anschriften: DR. IVO BABUŠKA, Dr. Sc., Praha 6—Dejvice, Glinkova 10, ČSSR
MILAN PRÁGER, C. Sc. Praha 4—Košíře, V cibulkách 5, ČSSR

Nichtkommutative Operatorenrechnung

VON LOTHAR BERG

Die Menge aller für $0 \leq \xi \leq x < \infty$ zweidimensional stetigen Funktionen $k(x, \xi)$, die wir Kerne nennen, bildet mit der gewöhnlichen Addition und der verallgemeinerten Faltung

$$k_1(x, \xi) * k_2(x, \xi) = \int_{\xi}^x k_1(x, \eta) k_2(\eta, \xi) d\eta \quad \dots \quad (1)$$

einen nichtkommutativen Ring. Dieser Ring wurde in [6] unter speziellen Zusatzvoraussetzungen untersucht, unter denen er sogar ein Integritätsbereich ist. Wir können hier jedoch Nullteiler zulassen wie die Funktionen, die für $x \leq 1$ sowie $1 \leq \xi$ identisch verschwinden. Für die Kerne definieren wir eine Multiplikation mit den für $0 \leq x < \infty$ stetigen Funktionen $f(x)$ durch

$$k(x, \xi) \circ f(x) = \int_0^x k(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \dots \quad (2).$$

Diese Multiplikation geht aus (1) für $\xi = 0$ hervor. Den speziellen Kern $k(x, \xi) \equiv 1$ bezeichnen wir mit l und nennen ihn wegen

$$l \circ f(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \quad \dots \quad (3)$$

den *Integrationskern*. Neben dem Ring der Kerne betrachten wir in Anlehnung an die Methode von [1] die *Gruppe der Operatoren* $1 + k(x, \xi)$, für die wir die Multiplikation mit den Funktionen $f(x)$ durch

$$(1 + k)f(x) = f(x) + \int_0^x k(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \dots \quad (4)$$

erklären, so daß hier die Eins die *Zahl* 1 ist. Daß diese Operatoren wirklich eine Gruppe bilden, folgt aus

$$(1 + k_1)(1 + k_2) = 1 + (k_1 + k_2 + k_1 * k_2)$$

und

$$(1 + k)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n k^{*n},$$

wobei die Potenzen k^{*n} im Sinne von (1) zu bilden sind und die Reihensumme stets wieder ein Kern ist. Diese Operatoren genügen vollkommen, um *VOLTERRASche Integralgleichungen 2. Art* (vgl. auch [8], Kap. IV) sowie lineare *Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten* (vgl. auch [4]) aufzulösen. Letztere lassen sich auf den vorhergehenden Fall zurückführen, indem man mit Hilfe der *TAYLORSchen Formel*

$$y^{(v)}(x) = y_0^{(v)} + y_0^{(v+1)}x + \frac{1}{2!}y_0^{(v+2)}x^2 + \dots + \frac{1}{(n-v-1)!}y_0^{(n-1)}x^{n-v-1} + l^{n-v} \circ y^{(n)}(x)$$

zunächst die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen durch die höchste Ableitung und die Anfangswerte ausdrückt. Nähere Ausführungen und Beispiele hierzu findet man in [3]. Speziell für konstante Koeffizienten ergibt sich die kommutative Operatorenrechnung in der Schreibweise von [7] — nicht von [2]. Läßt man auch gewisse unstetige Funktionen zu, so kann man beispielsweise auch den durch

$$b \circ f(x) = \int_0^x \frac{1}{\eta} \int_0^\eta f(\xi) d\xi d\eta \quad \dots \quad (5)$$

definierten Kern $b = \ln(x/\xi)$ betrachten. In diesem Fall gelangt man zu der Operatorenrechnung von [5], die auf die modifizierte *BESSELSche Differentialgleichung*

$$(x y'(x))' = \lambda y(x)$$

zugeschnitten ist.

Literatur

- [1] S. BELLERT, On foundations of operational calculus, Bull. de l'Acad. Polonaise d. Sciences, Cl. III, 5 (1957), p. 855—858.
- [2] L. BERG, Moderne Operatorenrechnung, ZAMM 39 (1959), S. 342—345.
- [3] L. BERG, Einführung in die Operatorenrechnung, Berlin (im Druck).
- [4] L. BERG, Lösung der linearen Differentialgleichung durch Transformation in einen Schiefkörper, Math. Z. (im Druck).
- [5] W. A. DITKIN, Zur Theorie der Operatorenrechnung (russ.), Доклады Акад. Наук СССР 116 (1957), p. 15—17.
- [6] I. FENYÖ, Über die Verallgemeinerung der Operatorenrechnung, Publicationes Mathematicae 6 (1959), S. 48—59.
- [7] J. MIKUSIŃSKI, Operatorenrechnung, Berlin 1957.
- [8] F. RIESZ - B. SZ. NAGY, Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest 1953.

Anschrift: Prof. Dr. L. BERG, Halle/Saale, Hoher Weg 30

Optimale Parameterwahl bei einer Klasse von Iterationsverfahren

VON HORST BIALY

Sei A eine lineare, beschränkte und symmetrische Abbildung eines *HILBERT-Raumes* \mathfrak{H} in sich. Dann gibt es reelle Zahlen m und M , so daß $m(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt. Zur genäherten Lösung linearer Gleichungen zweiter Art

$$\varkappa Ax + y = x \quad \dots \quad (1),$$

wo \varkappa ein reeller oder komplexer Parameter und y ein vorgegebenes Element aus \mathfrak{H} ist, sind neben dem klassischen Iterationsverfahren noch solche bekannt, die von konvergenzbeeinflussenden

Parametern $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ abhängen. In hinreichenden Konvergenzbedingungen für diese Verfahren wird die Wahl dieser Parameter auf gewisse Intervalle beschränkt, und es bleibt dem Rechner überlassen, für welche Parameterwahl innerhalb der genannten Intervalle er sich entscheidet. Hier soll ein Prinzip für die Festlegung der Parameter unter der Voraussetzung angegeben werden, daß die Schranken m und M von A bekannt sind.

Wir wollen annehmen, daß (1) eine Lösung $x^* \in \mathfrak{L}$ besitzt und mit $u_k = x_k - x^*$ den Fehler des k -ten Iterationsschrittes x_k gegenüber der Lösung x^* bezeichnen. Die von uns betrachtete Klasse von Iterationsverfahren sei durch die Vorschrift

$$u_{k+1} = p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; A) u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

charakterisiert, wobei $p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda)$ ein Polynom n -ten Grades ($n = 1, 2, \dots$) in λ ist, dessen Koeffizienten stetig von den Parametern $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ ($m \leq n$) abhängen. Die Projektionenschar (E_λ) sei die durch A erzeugte Zerlegung der Einheit. Dann gilt wegen (2)

$$u_{k+1} = \int_m^M p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda) dE_\lambda u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (3).$$

Wir wollen solche Parameterwerte $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_m^*$ als „optimale Parameter“ bezeichnen, für die der Ausdruck

$$q(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = \max_{m \leq \lambda \leq M} |p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda)|$$

ein Minimum wird, das offenbar stets existiert und mit q bezeichnet werde. Durch diese Forderung soll ein hinsichtlich der totalen Konvergenz (Konvergenz unabhängig von der Wahl des Ausgangselementes $u_0 = x_0 - x^*$) günstiges Verhalten der Iterationsverfahren erreicht werden, was aus (3) ersichtlich ist. Natürlich könnte man auch daran denken, den Ausdruck $p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda)$ in anderer Weise zu minimisieren, etwa indem man das Integral

$$\int_m^M p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda) \overline{p_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m; \lambda)} d\lambda$$

zum Minimum macht. Darauf soll aber hier nicht weiter eingegangen werden.

Hinreichend für die Konvergenz der genannten Iterationsverfahren ist die Bedingung $q < 1$. Man erhält in diesem Falle die Fehlerabschätzung

$$\|u_k\| \leq \frac{q^r}{1 - q^r} \|x_k - x_{k-r}\|, \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (4).$$

Beispiele: Wir betrachten das in [1] auf Seite 65 angegebene Verfahren

$$x_{n+1} = (1 - \sigma) x_n + \kappa \sigma A x_n + \sigma y$$

zu dem das Polynom

$$p_1(\sigma; \lambda) = (1 - \sigma) + \kappa \sigma \lambda$$

gehört. σ^* ist die Lösung der Gleichung $p_1(\sigma; m) = -p_1(\sigma; M)$ und man erhält

$$\sigma^* = \frac{2}{2 - \kappa(M + m)}, \quad q = \left| \frac{\kappa(M - m)}{2 - \kappa(M + m)} \right|.$$

Es ist interessant, daß WIARDA [2] im Falle $m = 0$ in der Formulierung der hinreichenden Konvergenzbedingung für das gleiche Verfahren das Intervall $0 < \sigma \leq \sigma^*$ angibt.

Ein Verfahren mit zwei Parametern σ_1 und σ_2 wird beispielsweise beschrieben durch die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = (1 - \sigma_1) x_n + (\kappa \sigma_1 - \sigma_2) A x_n + \kappa \sigma_2 A^2 x_n + \sigma_1 y + \sigma_2 A y.$$

Das zugehörige Polynom lautet

$$p_2(\sigma_1, \sigma_2; \lambda) = (1 - \sigma_1) + (\kappa \sigma_1 - \sigma_2) \lambda + \kappa \sigma_2 \lambda^2.$$

Die Bestimmung der optimalen Parameter σ_1^* und σ_2^* kann hier allerdings erst erfolgen, wenn κ , M und m zahlenmäßig bekannt sind.

Literatur

- [1] H. BÜCKNER, Die Praktische Behandlung von Integralgleichungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952.
- [2] G. WIARDA, Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen, Leipzig 1930.

Anschrift: Dr. rer. nat. HORST BIALY, Dresden A 20, Heiligenbornstr. 22

Eine Fehlerabschätzung zu Eigenlösungen bei linearen Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen^{*)}

Von WERNER BOLLERMANN

Verschiedene Einschließungsverfahren bei linearen Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen in der selbstadjungierten und volldefiniten Form führen auf eine Abschätzung der Differenz zwischen dem RAYLEIGHschen Quotienten einer genäherten Eigenlösung und dem zugehörigen Eigenwert. In dieser Arbeit soll ein Verfahren hergeleitet werden, vermittelt dieser Differenz auch eine Fehlerabschätzung zu der genäherten Eigenlösung durchzuführen, ohne an spezielle Ansätze gebunden zu sein.

1. Problemklasse. Hilfsmittel

Zur Eigenwertaufgabe

$$M y = k N y, \quad U y = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ohne den Eigenwert k in den Randbedingungen (ausführlicher: [1], S. 46—7, 4.11—4.14; [2], S. 213—15) sei folgende Abschätzung bekannt:

$$0 \leq R - k_s \leq d \quad (d > 0) \quad \dots \dots \dots (2)$$

mit u als Vergleichsfunktion im RAYLEIGHschen Quotienten $R = R[u]$ und s als natürliche Zahl. (Alle nicht näher erläuterten Begriffe im Sinne von [1] oder [2], S. 213—34.)

Unter Benutzung der vereinfachenden Schreibweise

$$\int_a^b u M v dx = \langle u, v \rangle, \quad \int_a^b u N v dx = (u, v) \quad \dots \dots \dots (3)$$

für Vergleichsfunktionen u und v sind noch weitere Voraussetzungen generell zu treffen:

1. Der Eigenwert k_s ist ein einfacher $\dots \dots \dots (4)$

2. In (2) ist $R < l_{s+1}$ mit $l_{s+1} \leq k_{s+1}$ erfüllt $\dots \dots \dots (5)$

3. $(u, y_n) = 0$ ist erfüllt für $n = 1, 2, \dots, s-1$ $\dots \dots \dots (6)$

4. Die Randbedingungen $U y = 0$ enthalten

$$y_a = y_b = 0, \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$y_a = 0 \text{ oder } y_b = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

2. Einige Abschätzungen

Vermittels der PARSEVALschen Gleichung und BESSELSchen Ungleichung

$$(u, u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2, \quad \langle u, u \rangle \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 k_n \quad [(u, y_n) = b_n] \quad \dots \dots \dots (9)$$

nimmt die mit (u, u) multiplizierte Abschätzung (2)

$$0 \leq \langle u, u \rangle - k_s(u, u) \leq d(u, u) \quad \dots \dots \dots (10)$$

folgende Form an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 k_n - k_s \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \leq d(u, u) \quad \dots \dots \dots (11)$$

Nach Voraussetzung (6) wird die linke Seite nicht negativ (vgl. 2)

$$0 \leq \sum_{n=s}^{\infty} b_n^2 k_n - k_s \sum_{n=s}^{\infty} b_n^2 \leq d(u, u) \quad \dots \dots \dots (12)$$

und gliedweise Addition der Reihenglieder führt bei Beachtung von

$$k_n - k_s \geq k_{s+1} - k_s > 0 \quad (n = s+1, s+2, \dots) \quad \dots \dots \dots (13)$$

auf die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{n=s+1}^{\infty} (k_{s+1} - k_s) b_n^2 \leq \sum_{n=s+1}^{\infty} (k_n - k_s) b_n^2 \leq d(u, u) \quad \dots \dots \dots (14)$$

^{*)} Vergleiche den Vortrag von Herrn S. FALK: „Einschließungssätze für Eigenwerte und Vektoren normaler Matrizenpaare“, 20. I. 61, Technische Hochschule Dresden; Veröffentlichung in der dortigen wissenschaftlichen Zeitschrift. — Der vorliegende Vortrag wurde für die GAMM-Tagung angemeldet, konnte aber nicht gehalten werden.

Division durch $(k_{s+1} - k_s)$ führt auf

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} b_n^2 \leq \frac{d(u, u)}{k_{s+1} - k_s} \quad \dots \quad (15).$$

Nun sei die Fehlerfunktion als Differenz zwischen genäherter und exakter Eigenlösung (multipliziert mit $b_s \neq 0$) betrachtet:

$$r \equiv u - b_s y_s \quad \dots \quad (16).$$

[Nach den Voraussetzungen (5) und (6) läßt sich vermittle der PARSEVALSchen Gleichung und BESSELSchen Ungleichung (9) $b_s \neq 0$ nachweisen]. Für die FOURIER-Koeffizienten von r gilt

$$\left. \begin{aligned} (r, y_n) &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots, s-1), & (r, y_s) &= (u - b_s y_s, y_s) = b_s - b_s = 0, \\ (r, y_n) &= (u, y_n) = b_n \quad (n = s+1, s+2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und die PARSEVALSche Gleichung

$$(r, r) = \sum_{n=s+1}^{\infty} b_n^2$$

führt jetzt mit der Abschätzung (15) auf das Ergebnis:

$$(r, r) \leq \frac{d(u, u)}{k_{s+1} - k_s} \quad \dots \quad (18).$$

Um eine entsprechende Abschätzung für $\langle r, r \rangle$ herzuleiten, ist die Gültigkeit eines Entwicklungssatzes vorauszusetzen ([1], S. 98 und 144—45; [4]), das heißt es soll folgende Darstellung gelten:

$$u \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n \quad \dots \quad (19).$$

Für die BESSELSche Ungleichung (9) folgt daraus das Gleichheitszeichen (hier ohne Beweis):

$$\langle u, u \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 k_n \quad \dots \quad (20).$$

Entsprechend (12) erhält man nach Addition der ersten Reihenglieder

$$0 \leq \sum_{n=s+1}^{\infty} b_n^2 k_n - k_s \sum_{n=s+1}^{\infty} b_n^2 \leq d(u, u) \quad \dots \quad (21)$$

und Einsetzen von (9, 20) führt in Verbindung mit (16—17) auf

$$0 \leq \langle r, r \rangle - k_s (r, r) \leq d(u, u) \quad \dots \quad (22).$$

Für r gilt nun nach dem Minimalprinzip von RAYLEIGH (vgl. 16—17)

$$R[r] = \frac{\langle r, r \rangle}{(r, r)} \geq k_{s+1}, \quad \frac{\langle r, r \rangle}{k_{s+1}} \geq (r, r) \quad \dots \quad (23)$$

und die Ungleichung (22) gewinnt damit die Gestalt

$$0 \leq \langle r, r \rangle - \frac{k_s}{k_{s+1}} \langle r, r \rangle \leq d(u, u) \quad \dots \quad (24).$$

Als Ergebnis folgt hieraus die gewünschte weitere Abschätzung:

$$\langle r, r \rangle \leq \frac{d(u, u)}{k_{s+1} - k_s} k_{s+1} \quad \dots \quad (25).$$

Abschließend sei noch die Abschätzung des Betrages einer Funktion $z(x)$ mit stetiger Ableitung (ohne Beweis) aufgeführt:

$$z^2 \leq \int_a^b (z')^2 dx \cdot h \quad (b > a) \quad \dots \quad (26),$$

$$h(x) = \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{array}{ll} x - a & \left(a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \right) \\ b - x & \left(\frac{a+b}{2} \leq x \leq b \right) \end{array} \right] & \text{für } y_a = y_b = 0, \\ &\left[\begin{array}{ll} x - a & (a \leq x \leq b) \\ b - x & (a \leq x \leq b) \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{für } y_a = 0, \\ \text{für } y_b = 0 \end{array} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (27).$$

Ist $(z')^2$ symmetrisch zu $\frac{a+b}{2}$ bei $y_a = y_b = 0$, so reduziert sich $h(x)$ auf die Hälfte.

3. Auswertung im Fall $s = 1$

Die Orthogonalitätsforderung (6) für u ist im allgemeinen schwer zu erfüllen. Für den praktisch wichtigen Fall der ersten Eigenlösung entfällt sie aber, und seine Auswertung sei unter folgenden zusätzlichen Voraussetzungen durchgeführt:

$$\text{I.} \quad (v, v) = \int_a^b [g_1(v')^2 + g_0 v^2] dx \quad (g_1 > 0, g_0 \geq 0) : \quad \dots \quad (28)$$

$\int_a^b (v')^2 dx \leq \frac{(v, v)}{g_{1 \min}}$ führt in Verbindung mit den Abschätzungen (18, 26) auf das Ergebnis (\tilde{y}_1 als nicht normierte Eigenlösung):

$$r^2 \leq h \int_a^b (r')^2 dx \leq h \frac{(r, r)}{g_{1 \min}} \leq h \frac{d(u, u)}{(k_2 - k_1) g_{1 \min}} \quad \dots \quad (29),$$

$$(u - \tilde{y}_1)^2 \leq h \frac{d(u, u)}{(k_2 - k_1) g_{1 \min}} \quad \dots \quad (30).$$

$$\text{II.} \quad \langle v, v \rangle = \int_a^b [f_1(v')^2 + f_0 v^2] dx \quad (f_1 > 0, f_0 \geq 0), \quad u \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n : \quad \dots \quad (31).$$

$\int_a^b (v')^2 dx \leq \frac{\langle v, v \rangle}{f_{1 \min}}$ führt in Verbindung mit (25, 26) auf das Ergebnis:

$$r^2 \leq h \int_a^b (r')^2 dx \leq h \frac{\langle r, r \rangle}{f_{1 \min}} \leq h \frac{d(u, u) k_2}{(k_2 - k_1) f_{1 \min}} \quad \dots \quad (32),$$

$$(u - \tilde{y}_1)^2 \leq h \frac{d(u, u) k_2}{(k_2 - k_1) f_{1 \min}} \quad \dots \quad (33).$$

$$\text{III.} \quad M w = -k^* w'', \quad U w = 0 \quad \dots \quad (34)$$

erfüllt die gleichen Voraussetzungen wie die Aufgabe (1) und

$$\int_a^b w (-w'') dx = \int_a^b (w')^2 dx, \quad u \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n \quad \dots \quad (35)$$

ist gültig:

$$\text{Aus } \frac{\langle v, v \rangle}{\int_a^b (v')^2 dx} \geq k_1^* \text{ folgt } \int_a^b (v')^2 dx \leq \frac{\langle v, v \rangle}{k_1^*} \text{ und in Verbindung mit (25, 26) führt } r^2 \leq h \int_a^b (r')^2 dx \leq$$

$h \frac{\langle r, r \rangle}{k_1^*}$ auf das Ergebnis:

$$(u - \tilde{y}_1)^2 \leq h \frac{d(u, u) k_2}{(k_2 - k_1) k_1^*} \quad \dots \quad (36).$$

Bei der praktischen Auswertung (30, 33, 36) wird man die Eigenwerte durch ihre Schranken $R \geq k_1$ und $l_2 \leq k_2 \leq L_2$ ersetzen.

Beispiel ([1], S. 196–98): $[(3 - x^2) y']' + 60 y = -k y'', \quad y_{(\pm 1)} = y'_{(\pm 1)} = 0$

$$u = F_1 = 39 - 45 x^2 + 5 x^4 + x^6 \text{ (Iteration)}, \quad (u, u) = a_2 = 3825,6, \quad R = 31,35485,$$

$$R - k_1 \leq d = 0,00389 \text{ (statt } l_2 l_3 = 47,11).$$

Besonderheit: $(r')^2$ ist symmetrisch zu $x = 0$.

Abschätzung nach Ziffer 29 und 30:

$$r^2 \leq h \frac{0,00389 \cdot 3825,6}{47,110 - 31,355} = 0,9443 \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1-x}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ergebnis:

$$|u - \tilde{y}_1| \leq 0,688 \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{1-x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad y_{1(0)} = 39 \pm 0,688.$$

4. Eine Zusammenstellung weiterer Beispiele

Diese Zusammenstellung soll die Anwendbarkeit des Verfahrens auf einige Beispiele der Literatur veranschaulichen. Eine höhere Genauigkeit erfordert mehr Iterationsschritte oder RITZ-Ansätze mit mehr Gliedern.

| Aufgabe: (Literatur) | Abschätzung nach Ziffer . . . | $ u - \tilde{y}_1 \leq :$ (Fehler in %) |
|--|--|--|
| $-y'' = k(1 + \sin x)y$ $y_0 = y_\pi = 0$ ([1], S. 169—70) | 33: $u = \sin x$, Iteration y_2 antisymmetrisch, $(r')^2$ symmetrisch $5,21 \leq k_2 \leq 5,83$ (S. 427) | $0,0344 \sqrt{h}$ $\left(\pm 4,4 \text{ bei } x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$ |
| $-y'' = k(2 + \cos x)y$ $y_0 = y_\pi = 0$ ([1], S. 241—42, 397—99) | 33: $u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x + 0,081335 \sin 2x$ $+ 0,002485 \sin 3x$, RITZ-Ansatz und Kettenbruchmethode $k_1 = 0,4900357$, $k_2 = 2,0593$ | $0,000542 \sqrt{h}$ $\left(\pm 0,09 \text{ bei } x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$ |
| $-[(1+x)y']' = k(1+x)y$ $y'_0 = y_1 = 0$ ([2], S. 219—20, 222—23) | 33: $u = 3 - 5x^2 + 2x^3$ Iteration $22,94 \leq k_2 \leq 23,13$ | $0,0453 \sqrt{h}$ $(\pm 1,6 \text{ bei } x = 0)$ |
| $[(2-x)y'']' = -ky''$ $y_0 = y'_0 = y_1 = y'_1 = 0$ ([1], S. 170—71) | 30: $u = 24x^2 - 4x^3 + 47x^4 + 27x^5$ Iteration $82,5 \leq k_2$ nach [5], 4.d | $0,473 \sqrt{h}$ $(\pm 9,3 \text{ bei } x = 0,7)$ |
| $[(1+x^4)y'']' - 4y'' = k(-y'' + x^2y)$ $y_0 = y'_0 = y_1 = y'_1 = 0$ ([5], S. 348—49) | 30: $u = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \pi x$ $+ 0,0605 \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sin 2\pi x$, RITZ-Ansatz, $1,213(2\pi)^2 \leq k_2$ | $0,0595 \sqrt{h}$ $(\pm 9,4 \text{ bei } x = 0,5)$ |
| $[(4+x^2)y'']' = k(1+x)y$ $y_0 = y'_0 = y_1 = y'_1 = 0$ ([5], S. 349) | 36: $u = \sin \pi x + 0,01432 \sin 2\pi x$, RITZ-Ansatz, Hilfsproblem: $Mw = -k^*w'$, $Uw = 0$ $k_1^* = 18,20\pi^2$ nach [1], S. 427 | $0,0866 \sqrt{h}$ $(\pm 6,2 \text{ bei } x = 0,5 ;$ RITZ-A. 3 Glieder $\pm 5,7)$ |

Literatur

- [1] L. COLLATZ, Eigenwertaufgaben mit techn. Anwendungen, 1949.
- [2] L. COLLATZ, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, 2. Aufl., 1955.
- [3] G. BERTRAM, Zur Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei Eigenwertproblemen, Diss. 56 S. Hannover 1950; ein weiterer Bericht: ZAMM 37 (1957), S. 191—201.
- [4] W. DÜCK, Ein Entwicklungssatz bei linearen, selbstadjungierten, volldefiniten Eigenwertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, ZAMM 39 (1959), S. 358—63.
- [5] W. BOLLERMANN, Zur Einschließung von Eigenwerten unter Verwendung des Maximum-Minimum-Prinzips, ZAMM 40 (1960), S. 342—49.

Anschrift: Dr. W. BOLLERMANN, Stadthagen (b. Hannover), Adolf-Schweer-Straße 8

Bemerkungen zur numerischen Behandlung und Fehlerabschätzung bei singulären Integralgleichungen

Von HELMUT BRAKHAGE*)

Für die singuläre Integraltransformation

$$\hat{u}(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} u(\vartheta') d\vartheta' \quad \dots \dots \dots (1),$$

die die 2π -periodische Funktion $u(\vartheta')$ in die konjugierte periodische Funktion überführt, ergeben sich durch trigonometrische Interpolation mit äquidistanten Stützstellen sehr einfache Nähe-

*) Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

rungsformeln, auf deren Bedeutung für die numerische Behandlung vieler singulärer Integralgleichungen vor allem I. E. GARRICK [2] hingewiesen hat. Legt man hierbei die Kollokationsstellen, an denen die Integralgleichung erfüllt werden soll, jeweils in die Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgende Stützstellen, anstatt sie mit den Stützstellen zusammenfallen zu lassen, so ergeben sich in vielen Fällen erhebliche numerische Vorteile. Voraussetzung ist hierbei, daß es sich um eine singuläre Integralgleichung 1. Art handelt, d. h. daß die gesuchte Funktion nur unter dem Integral auftritt. Für die nähere Erläuterung beschränken wir uns hier auf einen speziellen, aber für die Anwendungen sehr wichtigen Typ singulärer Integralgleichungen.

Es sei $u(\vartheta')$ eine gerade 2π -periodische Funktion: $u(-\vartheta') = u(\vartheta')$; von den N äquidistanten Stützstellen $\vartheta'_\nu = a + 2\nu\pi/N$, ($\nu = 1, \dots, N$) werde vorausgesetzt, daß das Gesamtsystem der Stützstellen symmetrisch zu $\vartheta' = 0$ liegt. Ersetzt man den Integralmittelwert über die Periode nach der Rechteckregel durch das arithmetische Mittel der Stützstellenwerte und faßt symmetrisch zu $\vartheta' = 0$ gelegene Stellen zusammen, so erhält man

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(\vartheta') d\vartheta' \approx \frac{2}{N} \sum'_{\vartheta'_\nu \in [0, \pi]} u(\vartheta'_\nu) \quad \dots \quad (2).$$

Hierbei bedeute Σ' , daß für die evtl. an den Intervallenden $0, \pi$ gelegenen Stützstellen die zugehörigen Summanden jeweils mit dem Faktor $1/2$ zu multiplizieren sind.

Indem man entsprechend zusammenfaßt, geht für gerade periodische Funktionen (1) in (3) über und man erhält leicht aus den GARRICKSchen Formeln die Näherungsformeln (4) für die singuläre Integraltransformation (3):

$$\hat{u}(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} u(\vartheta') d\vartheta' \quad \dots \quad (3),$$

$$\hat{u}(\vartheta_\mu) \approx \frac{2}{N} \sum'_{\vartheta'_\nu \in [0, \pi]} \frac{\sin \vartheta_\mu}{\cos \vartheta'_\nu - \cos \vartheta_\mu} u(\vartheta'_\nu) \quad \dots \quad (4).$$

$$(\vartheta_\mu = a + (2\mu + 1) \cdot (\pi/N))$$

Die besonders einfachen und sehr genauen Näherungsformeln (4) ergeben sich durch die spezielle Lage der Kollokationsstellen jeweils in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützstellen. Bemerkenswert ist hierbei, daß an diesen speziellen Stellen ϑ_μ die Auswertung des singulären Integrals (3) nach der gleichen Formel (2) wie für einen nichtsingulären Integranden vorgenommen werden kann, und daß sowohl (4) wie auch (2) für die ersten $N \cos$ -Glieder der FOURIER-Reihe von $u(\vartheta')$ (d. h. bis einschließlich $\cos(N-1)\vartheta'$) exakt gilt¹⁾. Bei einer Stützstellenzahl von $\sim N/2$ besitzen also beide Formeln eine Genauigkeit, die im wesentlichen der Genauigkeit der GAUSSSchen Quadraturformeln analog ist.

Es werde jetzt eine singuläre Integralgleichung der Form

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t-t'} + k_1(t, t') \right] x(t') dt' = f_1(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad x(1) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

mit regulärem Zusatzkern k_1 zugrunde gelegt. Mit $t = -\cos \vartheta$, $y(\vartheta) = \sin \vartheta \cdot x(-\cos \vartheta)$ kommt man von (5) zu einer Integralgleichung der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi m(\vartheta, \vartheta') y(\vartheta') d\vartheta' &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta' - \cos \vartheta} + \sin \vartheta \cdot k(\vartheta, \vartheta') \right] y(\vartheta') d\vartheta' \\ &= \sin \vartheta f(\vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi), \quad y(\pi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6).$$

Hierbei sind $k(\vartheta, \vartheta')$, $f(\vartheta)$, $y(\vartheta')$ gerade 2π -periodische Funktionen in ϑ, ϑ' , so daß also der singuläre und der nichtsinguläre Bestandteil des Integrals nach der gemeinsamen Formel (2) ausgewertet werden kann, wenn man die Kollokationsstellen in der angegebenen Weise wählt. Man erkennt leicht, daß man eine optimale Anordnung erhält, wenn man $N = 2n + 1$ ungerade wählt und eine der Stützstellen nach $\vartheta' = \pi$ legt, die dann aber wegen $y(\pi) = 0$ nicht explizit

¹⁾ (4) gilt auch noch für $\cos N \vartheta'$ exakt.

auftritt. Man kommt damit für die näherungsweise Auflösung von (6) zu dem folgenden linearen Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{2n+1} \cdot \sum_{\nu=1}^n m(\vartheta_{\mu}, \vartheta'_{\nu}) \tilde{y}(\vartheta'_{\nu}) &= \sin \vartheta_{\mu} \cdot f(\vartheta_{\mu}), & \mu = 1, \dots, n, \\ \vartheta'_{\nu} &= (2\nu - 1) \cdot \pi / (2n + 1), & \vartheta_{\mu} = 2\mu \pi / (2n + 1) \end{aligned} \right\} \dots (7).$$

Integralgleichungen vom Typ (5) treten z. B. in der Strömungslehre häufig auf (u. a. bei Rechnungen an Ringflügeln, Unterwassertragflügeln, schlanken Deltaflügeln). Für die numerische Praxis ist wichtig, daß die Aufstellung des linearen Gleichungssystems nach (7) sehr einfach und für die Programmierung von Rechenautomaten günstig ist. Die numerische Erprobung an Beispielen zeigte durchweg sehr gute Resultate schon bei geringen Stützstellenzahlen. Die sogenannte Dreiviertelpunktmethode, die bei nur je einer Stütz- und Kollokationsstelle in vielen Anwendungen erstaunlich genaue Näherungswerte bei (5) liefert ([3], [5], [6]), ist, wie man leicht erkennt, mit der Anwendung von (7) für $n = 1$ gleichwertig (man beachte $t_1 = -\cos \vartheta_1 = 1/2$, $t'_1 = -\cos \vartheta'_1 = -1/2$). Es sei darauf hingewiesen, daß E. REISSNER [4], der von einer etwas anderen Begründung der Dreiviertelpunktmethode ausgeht, einen Verallgemeinerungsvorschlag gemacht hat, der aber nicht mit (7) äquivalent ist. Ganz ähnlich wie bei (5) kann man auch in allgemeineren Fällen vorgehen, etwa wenn $\int_{-1}^1 x(t) dt = 0$ statt $x(1) = 0$ als Nebenbedingung gegeben ist. Über die Anwendung auf die numerische Behandlung der Tragflächengleichung soll an anderer Stelle ausführlicher berichtet werden.

Es wurden Untersuchungen zur Fehlerabschätzung durchgeführt. Besonders einfache Abschätzungen für die Fehler R_Q und R_G der Näherungsformeln (2) und (4) erhält man, wenn die periodische Funktion $u(\vartheta)$ analytisch ist: Die analytische Fortsetzung $u(\vartheta + i\eta)$ existiere im Streifen $|\eta| \leq \lambda$, $u(\vartheta)$ sei reell auf der reellen Achse, weiter sei $\|u\|_{\lambda} = \max_{\vartheta} |u(\vartheta + i\lambda)|$ und $r = e^{\lambda}$. Dann gilt

$$|R_Q| \leq C_Q \|u\|_{\lambda}, \quad |R_G| \leq C_G \|u\|_{\lambda} \quad \dots \dots \dots (8)$$

mit

$$C_Q = \frac{2}{r^N - 1}, \quad C_G = \frac{2}{r^N} \cdot \frac{r + 1 + r^{-N}}{r^2 - 1} \cdot \frac{r^N}{r^N - 1}.$$

Die Abschätzung für den Fehler R_Q der Rechteckregel wurde von P. DAVIS [1] angegeben. In ähnlicher Weise wie in dem besonders einfachen Fall der Rechteckregel kommt man auch zu der angegebenen Abschätzung von R_G , die genau so auch für die entsprechenden GARRICKSchen Näherungsformeln für (1) gilt. Ähnliche Abschätzungen wurden für andere trigonometrische Approximationen hergeleitet (trigonometrische Interpolation, Differentiation, Näherungsformeln von MULTHOPP).

Es seien $k(\vartheta, \vartheta')$ und $f(\vartheta)$ analytisch in ϑ, ϑ' , und es seien

$$\|k\|_{\lambda}^{(1)} = \max_{\vartheta, \vartheta'} |k(\vartheta + i\lambda, \vartheta')|, \quad \|k\|_{\lambda}^{(2)} = \max_{\vartheta, \vartheta'} |k(\vartheta, \vartheta' + i\lambda)|.$$

Ist weiter β eine Norm für die Umkehrmatrix des Gleichungssystems (7) im Sinne des Zeilen-summenkriteriums und ist eine Schfanke für $\max_{\vartheta} |y(\vartheta)|$ bekannt, so erhält man leicht die folgende

Fehlerabschätzung für die durch (7) gegebenen Näherungswerte $\tilde{y}(\vartheta'_{\nu})$:

$$|y(\vartheta'_{\nu}) - \tilde{y}(\vartheta'_{\nu})| \leq \beta (C_G + \|k\|_{\lambda}^{(2)} C_Q) (\cosh \lambda \cdot \|f\|_{\lambda} + \|k\|_{\lambda}^{(1)} \cdot \max_{\vartheta} |y|) \cdot 2(r^2 - 1)^{-1/2} \quad (9).$$

Durch Zusatzüberlegungen kommt man von hier zu einer etwas komplizierteren Abschätzung, in der $\max_{\nu} |\tilde{y}(\vartheta'_{\nu})|$ an Stelle der i. a. nicht bekannten Größe $\max_{\vartheta} |y|$ auftritt.

Literatur

- [1] P. DAVIS, On the numerical integration of periodic analytic functions; On Numerical Approximation, Madison 1959, The University of Wisconsin Press.
- [2] I. E. GARRICK, Conformal mappings in aerodynamics, with emphasis on the method of successive conjugates, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. **18**, p. 137—147.
- [3] W. H. ISAY, Zur Theorie der nahe der Wasseroberfläche fahrenden Tragflächen, Ing.-Arch. **27** (1959), S. 295—313.
- [4] E. REISSNER, Note on the theory of lifting surfaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949) p. 208—215.
- [5] J. WEISSINGER, Über eine Erweiterung der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie, Math. Nachr. **2** (1949) S. 46—106.
- [6] J. WEISSINGER, Zur Aerodynamik des Ringflügels in inkompressibler Strömung, Z. f. Flugwiss. **4** (1956), S. 141—150.

Anschrift: Dr. H. BRAKHAGE, Karlsruhe, Lenzstr. 7

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewisser Integrodifferentialgleichungen

VON DEMETRIOS DASKALOPULOS*)

Die Operatorentheorie von J. MIKUSINSKI wurde von P. BUTZER auf lineare VOLTERRASche Integralgleichungen vom Faltungstyp angewandt. Wir geben mit Hilfe dieser Theorie einige neue Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Integrodifferentialgleichungen und Systeme dieses Typs an. Wir bezeichnen mit \mathbf{K} die Klasse aller komplexen Funktionen $g(t)$ der reellen Variablen t , die in jedem endlichen Intervall $0 \leq t \leq T$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen haben und für die $\int_0^T |g(t)| dt$ endlich ist, und mit \mathbf{L} die Klasse aller lokal im LEBESGUESchen Sinne integrierbaren komplexen Funktionen auf $\mathbf{I}: 0 \leq t < \infty$. Betrachtet wird die Gleichung

$$\int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^n \alpha_k x^{(k)}(t) = f(t) \quad (t \in \mathbf{I}, n \geq 1) \quad (1),$$

wobei $F, f \in \mathbf{L}$ und die α_k komplexe Konstanten sind. Wenn $0 = t_0, t_1, t_2, \dots$ eine vorgegebene streng wachsende Folge ist, die keine Häufungsstelle im Endlichen besitzt und $c_{k\varrho}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$; $\varrho = 0, 1, 2, \dots$) ein vorgegebenes System von Werten, dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. Wenn $F \in \mathbf{L}, f \in \mathbf{K}$ ist, dann hat (1) unter den Anfangsbedingungen

$$x^{(k)}(0+) = c_{k0}, \quad x^{(k)}(t_\varrho + 0) - x^{(k)}(t_\varrho - 0) = c_{k\varrho} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; \quad \varrho = 1, 2, \dots)$$

genau eine Lösung $x = u + \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_\varrho h^{t_\varrho}$, die auf der Menge $\bigcup_{\varrho=0}^{\infty} (t_\varrho, t_{\varrho+1})$ $(n-1)$ -mal totalstetig differenzierbar ist mit $x^{(n)} \in \mathbf{K}$, und die fast überall die Integrodifferentialgleichung erfüllt. Dabei ist h^t der Verschiebungsoperator, u bzw. u_ϱ sind Funktionen, die auf $\mathbf{I} (n-1)$ - bzw. n -mal totalstetig differenzierbar sind und als Summen von fast gleichmäßig konvergenten Reihen dargestellt werden können.

Satz 2. Wenn $F, f \in \mathbf{L}$ ist, dann hat (1) unter den Anfangsbedingungen $x^{(k)}(0) = c_{k0}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) genau eine Lösung $x = u + u_0$, die auf $\mathbf{I} (n-1)$ -mal totalstetig differenzierbar ist mit $x^{(n)} \in \mathbf{L}$ und die fast überall die Integrodifferentialgleichung erfüllt.

Falls wir die Integralgleichung

$$\int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau + x(t) = f(t) \quad (F, f \in \mathbf{L}, t \in \mathbf{I}),$$

nach dieser Methode behandeln, erhalten wir für ihre Lösung einen Satz, der bekannte Sätze (BUTZER [1], DOETSCH [2]) über solche Gleichungen als Spezialfälle enthält.

Es sei jetzt das System von Integrodifferentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^n \left[\int_0^t F_{ik}(t-\tau) x_k(\tau) d\tau + \beta_{ik} x_k(t) + \gamma_{ik} x'_k(t) \right] = f_i(t) \quad (t \in \mathbf{I}; i = 1, 2, \dots, n)$$

gegeben, wobei die $F_{ik}, f_i \in \mathbf{L}$ und die β_{ik}, γ_{ik} komplexe Konstante sind. Im Falle eines „normalen“ Systems, d. h. eines Systems mit Rang $(\gamma_{ik}) = n$, haben wir die Sätze:

Satz 3. Wenn $F_{ik} \in \mathbf{L}, f_i \in \mathbf{K}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) sind, dann hat (2) unter den Anfangsbedingungen $x_i(0+) = c_{i0}, x_i(t_\varrho + 0) - x_i(t_\varrho - 0) = c_{i\varrho}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $\varrho = 1, 2, \dots$) genau eine Lösung $x_i = u_i + \sum_{\varrho=0}^{\infty} u_{i\varrho} h^{t_\varrho}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die auf der Menge $\bigcup_{\varrho=0}^{\infty} (t_\varrho, t_{\varrho+1})$ totalstetig ist mit $x'_i \in \mathbf{K}$ und die fast überall das System erfüllt. Dabei sind die Funktionen $u_i, u_{i\varrho}$ totalstetig und können als Summen von fast gleichmäßig konvergenten Reihen dargestellt werden.

Satz 4. Wenn $F_{ik}, f_i \in \mathbf{L}$ sind, dann hat (2) unter den Anfangsbedingungen $x_i(0) = c_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) genau eine Lösung $x_i = u_i + u_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), die auf \mathbf{I} totalstetig ist mit $x'_i \in \mathbf{L}$ und die fast überall das System erfüllt. Führt man die Matrizen $F = (F_{ik}), f = (f_i), x = (x_i), \alpha_0 = (\beta_{ik}), \alpha_1 = (\gamma_{ik})$ ein, dann kann man das System (2) in folgender einfachen Form schreiben

$$\int_0^t F(t-\tau) x(\tau) d\tau + \alpha_0 x(t) + \alpha_1 x'(t) = f(t) \quad (t \in \mathbf{I}),$$

und die Sätze 3—4 entsprechen formal den Sätzen 1—2 mit $n = 1$.

*) Math. Inst. der Technischen Hochschule München.

Im Falle eines „anormalen“ Systems, d. h. eines Systems mit Rang $(\gamma_i) < n$ gewinnen wir noch einige entsprechende Sätze für die Lösung, wobei F_{ik}, f_i Elemente von gewissen Klassen totalstetiger Funktionen sein müssen. Ein grundlegender Unterschied zwischen normalen und anormalen Systemen liegt darin, daß die Anfangswerte c_{iq} im Falle eines anormalen Systems genau dann zulässig sind, wenn zwischen ihnen und den Koeffizienten β_{ik}, γ_{ik} bestimmte Beziehungen gelten.

Literatur

- [1] P. BUTZER, Die Anwendung des Operatorenkalküls von J. Mikusinski auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstyp, Arch. Rational Mech. Anal. 2 (1958), p. 114—128.
 [2] G. DOETSCH, Handbuch der Laplace-Transformation III, Basel 1956, S. 133.

Anschrift: Dipl.-Math. DEMETRIOS DASKALOPULOS (bei Messerer), München 13, Hohenzollernpl. 4/5

Ein Existenzsatz für die Lösungen spezieller nichtlinearer Gleichungen mit Nebenbedingungen

Von HANS EH RMANN*)

Eine Klasse von Existenzsätzen für die Lösungen von Randwertaufgaben bei nichtlinearen Differentialgleichungen enthält als wesentliche Voraussetzung eine absolute Beschränkung der in den Gleichungen auftretenden nichtlinearen Ausdrücke durch eine feste Funktion¹⁾. Dabei müssen dann zusätzlich die Randwertaufgaben ausgeschlossen werden, bei denen gewisse zugehörige lineare Probleme nicht lösbar sind.

Kann man z. B. bei Randwertaufgaben mit der Differentialgleichung $(D) y'' = f(x, y, y')$ zeigen, daß die absolute Beschränkung der rechten Seite als wesentliche Voraussetzung die Existenz einer Lösung sichert, so muß vorher das Problem $(D), y'(a) = A, y'(b) = B$, ausgeschlossen worden sein, da schon die Aufgabe $y'' = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 1$ keine Lösung besitzt.

Ähnliche Fälle treten auch bei anderen Problemen auf. Schließt man sie aus, was gewöhnlich durch die Forderung des Nichtverschwindens einer Determinante möglich ist, so zeigt sich, daß die Beschränkung der Nichtlinearität durch ein festes Element bei vielen allgemeinen Problemen die Existenz einer Lösung sichert.

Wir betrachten zu diesem Zweck Gleichungen der Gestalt

$$L u = M u \quad (1)$$

mit einem stetigen linearen Operator L und einem stetigen Operator M . Beide Operatoren bilden einen BANACHRAUM B_1 in einen BANACHRAUM B_2 ab. Ferner gelte:

a) Der Nullraum N von L ist endlich dimensional, d. h. jede Lösung der Gleichung $Lu = 0$ (Nullelement in B_2) läßt sich in der Gestalt $u = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v$ mit n linear unabhängigen Elementen $\varphi_v \in B_1$, der Basis von N , darstellen.

b) Es existiere ein vollstetiger linearer Operator \tilde{L}^{-1} derart, daß die Gleichung $Lu = w$, $w \in B_2$ durch $u = \tilde{L}^{-1} w$ gelöst wird und die Gleichung

$$u = \sum_{v=1}^n c_v \varphi_v + \tilde{L}^{-1} M u \quad (2)$$

für jedes feste System der c_v ($v = 1, \dots, n$) eine eindeutige Lösung besitzt²⁾.

c) Es existiere eine Zahl m mit $\|Mu\| \leq m$ für alle $u \in B_1$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der Existenzsatz:

Es seien F_μ und H_μ , $\mu = 1, \dots, n$, je n stetige Funktionale über B_1 , die den Bedingungen genügen

$\alpha)$ F_μ sind linear

$\beta)$ $|H_\mu[u]| \leq h$, für alle $u \in B_1$ und eine feste Zahl h .

Ist dann mit den obigen φ_v die Determinante

$$\det (F_\mu[\varphi_v]) \neq 0, \quad \mu, v = 1, \dots, n \quad (3),$$

so besitzt (1) mindestens eine Lösung, die den Nebenbedingungen

$$F_\mu[u] = H_\mu[u], \quad \mu = 1, \dots, n \quad (4)$$

genügt.

*) Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule Stuttgart.

¹⁾ Neben den Arbeiten von G. SCORZA-DRAGONI [1], W. M. WHYBURN [2] sei hier vor allem auf eine Arbeit von R. CONTI [3] verwiesen.

²⁾ Der zu L inverse Operator braucht nicht zu existieren. Dies ist im allgemeinen auch nicht der Fall. Die Forderung besagt lediglich, daß eine spezielle Lösung existiert.

Statt des Beweises³⁾ seien hier noch einige einfache Anwendungen erwähnt:

Bei *nichtlinearen Gleichungssystemen* sind die BANACH-Räume B_1 und B_2 im allgemeinen verschieden, nämlich n - und m -dimensionale Vektoren ($m \leq n$) mit einer der üblichen Normen. L ist eine $m \times n$ -Matrix. Da bei Vektoren ein stetiges lineares Funktional ebenfalls ein linearer homogener Ausdruck der Komponenten ist, kann hier in jedem Falle das System auch geschlossen behandelt werden. Eine solche Aufspaltung in Grundgleichungen (1) und Nebenbedingungen (4) ist nur vorteilhaft, wenn bei fester linker Seite der ersten m Gleichungen die Lösbarkeit für verschiedene Koeffizientensysteme der übrigen $n - m$ Gleichungen untersucht werden soll.

Bei *nichtlinearen Differenzengleichungen* hat der Operator L z. B. die Gestalt $Lu \equiv \Delta^k u(x) + a_1 \Delta^{k-1} u(x) + \dots + a_k u(x)$, $x \geq 0$, ganz, $a_i = a_i(x)$.

In vielen Fällen kann man einen Operator \tilde{L}^{-1} nach der LAGRANGESchen Methode aus einem Fundamentalsystem $\varphi_\nu(x)$ konstruieren⁴⁾. Die Vollstetigkeit ist für Aufgaben in endlichen Intervallen gesichert⁵⁾.

Beispiel: $Lu \equiv \Delta^n u(x) = a(x) \sin u(x+c) + b(x)$ mit x^ν , $\nu = 0, \dots, n-1$, als Fundamentalsystem von L . Die Nebenbedingungen treten z. B. in der Form auf

$\sum_{\sigma=1}^N c_{\mu\sigma} u(x_\sigma) = H_\mu[u(x_1), \dots, u(x_r)]$ mit beschränkten stetigen Funktionen H_μ . Ist $\det(\alpha_{\mu\nu}) = \det\left(\sum_{\sigma=1}^N c_{\mu\sigma} x_\sigma^\nu\right) \neq 0$, so existiert eine Lösung.

Bei *nichtlinearen Differentialgleichungen* kann man im allgemeinen ebenfalls mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten einen Operator \tilde{L}^{-1} konstruieren⁴⁾, der unter gewissen Bedingungen vollstetig ist. Z. B. erfüllen die Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ oder das System $y_i' = g_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, mit beschränkten stetigen Funktionen f bzw. g_i die Voraussetzungen des Satzes.

Spezielle Beispiele: 1. $y' = f(x, y)$ mit $|f(x, y)| \leq m$ für $0 \leq x \leq 2$, $|y| < \infty$. Für welche c existiert eine Lösung mit der Nebenbedingung $y(0) + c y(1) - 3 y(2) + \int_1^2 x y(x) dx = H_1[y]$ mit einem stetigen, beschränkten Funktional $H_1[y]$ (z. B. $H_1 = \text{const.}$ oder $H_1 = \int_0^2 \sin y(x) dx$ u. a.)?

Antwort: Für $c \neq 0,5$ ist das Problem stets lösbar, denn mit dem Fundamentalsystem $\varphi_1(x) = 1$ wird (3) $1 + c - 3 + \int_1^2 x dx = c - 1/2 \neq 0$ für $c \neq 1/2$. Für $c = 1/2$ ist das Problem, wie man leicht zeigen kann⁶⁾, nicht immer lösbar.

2. Man kann leicht zeigen⁷⁾, daß für die Differentialgleichung (5) $y^{(n)} + f(y) = c \sin \omega x$ mit geradem r und $f(y) = f(-y)$ die Randbedingungen

$$y^{(2s)}(0) = y^{(2s)}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2} \quad \dots \dots \dots (6),$$

hinreichend für die Periodizität der Lösung mit der Periode $2\pi/\omega$ sind. Wählt man als Fundamentalsystem von $L y \equiv y^{(n)} = 0$ die Funktionen $\varphi_p = x^p/p!$, $p = 0, \dots, n-1$, so erhält man als Determinante (3) mit (6) sofort mit $h = \pi/\omega$

$$\det(F_\mu[\varphi_\nu]) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h & h^2 & h^3 & \dots & h^{n-2} & h^{n-1} \\ 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \dots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h}{1!} & \dots & \frac{h^{n-4}}{(n-4)!} & \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{h}{1!} \end{vmatrix} = \frac{n}{h^2} \neq 0.$$

³⁾ Erscheint demnächst im „Archive for Rational Mechanics and Analysis“.

⁴⁾ Dies braucht für den reinen Existenzbereich natürlich nicht durchgeführt zu werden.

⁵⁾ Als Norm wähle man etwa $\|u\| = \sum_{k=0}^p |u(k)|$ oder $\|u\| = \max_{0 \leq k \leq p} |u(k)|$.

⁶⁾ Z. B. existiert dann für $y' = 0$, $H_1[y] = 1$ keine Lösung.

⁷⁾ Hierzu übertrage man z. B. die in [4] bei Differentialgleichungen 2. Ordnung angewandte einfache Methode auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Ist die Funktion $f(y)$ außerdem noch stetig und beschränkt für $|y| < \infty$, so besitzt die Gleichung (5) also mindestens eine periodische Lösung. Spezielles Beispiel ist die verallgemeinerte DUFFINGSche Differentialgleichung

$$y^{(n)} + c_1 \sin y = c_2 \sin \omega x \text{ mit gerader Ordnung}^8).$$

Literatur

- [1] G. SCORZA-DRAGONI, Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) 2 (1938), S. 255—275.
- [2] W. M. WHYBURN, Differential Systems with Boundary Conditions at more than two Points, Proc. Conference on Differential Equations, Univ. of Maryland (1956), S. 1—21.
- [3] R. CONTI, Sistemi differenziali ordinari con condizioni lineari, Ann. Mat. Pura Appl. 46 (1958), S. 109—130.
- [4] H. EHLMANN, Nachweis periodischer Lösungen bei gewissen nichtlinearen Schwingungsdifferentialgleichungen, Arch. Rat. Mech. Anal. 1 (1957), S. 124—138.

Anschrift: Dozent Dr. HANS EHLMANN, Ehningen Kr. Böblingen, Schillerstraße 28

⁸⁾ Ob auch bei ungerader Ordnung n jeweils eine periodische Lösung existiert, ist noch nicht bekannt.

Lösung von linearen Gleichungen mit Hilfe der Minimalgleichung

VON HEINZ ELTERMANN

1. Zurückführung eines beliebigen linearen Gleichungssystems auf ein stets lösbares mit positiv-semi-definiten Matrix

Jedes lineare Gleichungssystem

$$A x + f = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

mit einer allgemeinen reellen Matrix A vom Typ (m, n) , (für eine komplexe Matrix A verlaufen die Überlegungen analog), einem gegebenen Spaltenvektor f vom Typ $(m, 1)$ und dem gesuchten Spaltenvektor x vom Typ $(n, 1)$ kann durch Multiplikation von (1) mit der transponierten Matrix A' in das Gleichungssystem

$$G x + s = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

mit

$$G = A' A \quad \text{und} \quad s = A' f \quad \dots \dots \dots (3)$$

überführt werden, welches stets lösbar ist. — Wenn als Lösung von (1) jeder Vektor x verstanden werden soll, der die Vektornorm der linken Seite von (1) zu einem Minimum macht, so stimmen die Lösungen von (2) mit denen von (1) überein. Die strengen Lösungen von (2) sind Lösungen von (1) im Sinne der Ausgleichsrechnung.

Wenn die Spaltenvektoren der Matrix A linear unabhängig sind, ist die Matrix G regulär und besitzt paarweis verschiedene positive Eigenwerte $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ ($r \leq n$). Sind die Spaltenvektoren von A linear abhängig, so kommt noch der Eigenwert $\varrho_0 = 0$ hinzu. Zu jedem Eigenwert ϱ_i für $i = 0, 1, \dots, r$ existiert ein Eigenvektorraum

$$V_i = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, \dots, v_i^{(r_i)}) \quad \dots \dots \dots (4).$$

Mit passend gewählten Eigenvektoren $v_i \in V_i$ gilt dann für den Vektor s in (2) eine Entwicklung

$$s = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r \quad \dots \dots \dots (5),$$

wobei die Eigenvektoren v_1, \dots, v_r paarweis orthogonal sind. Ein Eigenvektor v_0 zum Eigenwert $\varrho_0 = 0$ tritt in (5) nicht auf, da s (vgl. (3)) auf jedem Eigenvektor v_0 orthogonal stehen muß, weil die Norm

$$\|A v_0\| = v_0 A' A v_0 = v_0 G v_0 = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

ist. In (5) brauchen im Spezialfall nicht alle Koeffizienten α_i von null verschieden zu sein. Bei geeigneter Numerierung der Eigenvektorräume (4) gilt also eine Entwicklung

$$s = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \quad \text{mit } k \leq r \quad \dots \dots \dots (7).$$

Entwickelt man auch den Lösungsvektor x nach den Eigenvektoren der Matrix G , so erhält man durch Einsetzen in (2) und Vergleich der Koeffizienten

$$x = v_0 - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_k v_k \quad \dots \dots \dots (8)$$

mit einem beliebigen Eigenvektor $v_0 \in V_0$ und $\varrho_i \beta_i = \alpha_i$ für $i = 1, \dots, k$. Setzt man $v_0 = 0$, erhält man aus (8) die ausgezeichnete Lösung x_0 , die unter allen Lösungen x die kleinstmögliche Norm besitzt. Die ausgezeichnete Lösung

$$x_0 = -\frac{\alpha_1}{\varrho_1} v_1 - \frac{\alpha_2}{\varrho_2} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\varrho_k} v_k \quad \dots \dots \dots (9)$$

ist eindeutig.

2. Bestimmung der ausgezeichneten Lösung mit Hilfe der speziellen Minimalgleichung

Die Matrix G genügt der allgemeinen Minimalgleichung

$$G(G - \varrho_1 E)(G - \varrho_2 E) \dots (G - \varrho_r E) = 0 \quad (10),$$

wobei, falls G regulär ist, der erste Faktor G entfällt. Multipliziert man (10) von rechts mit dem Vektor s , so erhält man wegen (7) die spezielle Minimalgleichung

$$(G - \varrho_1 E)(G - \varrho_2 E) \dots (G - \varrho_k E)s = 0 \quad (11),$$

die mit bestimmten Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ auf die Form

$$s + \gamma_1 Gs + \gamma_2 G^2 s + \dots + \gamma_k G^k s = 0 \quad (12)$$

gebracht werden kann. Durch Vergleich mit (2), (7) und (9) ergibt sich

$$x_0 = \gamma_1 s + \gamma_2 Gs + \dots + \gamma_k G^{k-1} s \quad (13).$$

Damit kann die Bestimmung der ausgezeichneten Lösung x_0 von (2) zurückgeführt werden auf die Bestimmung der speziellen Minimalgleichung (12), die die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$s, Gs, G^2 s, \dots, G^k s \quad (14)$$

beschreibt.

3. Die Bestimmung der speziellen Minimalgleichung durch ein Orthogonalisierungsverfahren und das Verfahren von HESTENES-STIEFEL

Durch einen Orthogonalisierungsprozeß, angewandt auf die Folge der Vektoren (14), wodurch gleichzeitig der von vornherein nicht bekannte Index $k \leq n$ mit bestimmt wird, bestimmt man die Folge der orthogonalen Vektoren

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= s, \\ s_1 &= s + \gamma_{11} Gs, \\ s_2 &= s + \gamma_{21} Gs + \gamma_{22} G^2 s, \\ &\dots \\ s_k &= s + \gamma_{k1} Gs + \gamma_{k2} G^2 s + \dots + \gamma_{kk} G^k s \end{aligned} \right\} \quad (15).$$

Der letzte Vektor s_k muß dann wegen (12) automatisch gleich dem Nullvektor sein, und (12) erhält die Form

$$s_k = 0 \quad (16).$$

Damit ist die spezielle Minimalgleichung (12) bestimmt.

Das Verfahren von HESTENES-STIEFEL [1] stellt ein besonders rationell arbeitendes Verfahren zur Bestimmung des Orthogonalsystems (15) dar. Man bestimmt hierbei mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$s_{i+1} = s_i + \lambda_i G p_i, \quad p_{i+1} = s_{i+1} + \mu_i p_i \quad (17)$$

mit $s_0 = p_0 = s$ zwei Folgen von Vektoren s_0, s_1, \dots, s_k und p_0, p_1, \dots, p_k , indem man die Zahlen λ_i bzw. μ_i so berechnet, daß jeweils die Vektoren s_{i+1} und $G p_{i+1}$ orthogonal auf dem Vektor s_i stehen. Die Zahlen λ_i und μ_i sind, da sich die Matrix G in dem Unterraum der Vektoren (14) (vgl. (7)) wie eine positiv-definite Matrix verhält, sämtlich berechenbar. Die Vektoren s_0, s_1, \dots, s_k nach (17) stimmen mit den Vektoren (15) überein. Gleichzeitig erhält man die ausgezeichnete Lösung (13) in der Form

$$x_0 = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} \quad (18).$$

Die Koeffizienten γ_i der Minimalgleichung (12) werden zwar bei der speziellen Programmierung des Verfahrens [1] nicht explizit berechnet, könnten aber aus den Zahlen λ_i und μ_i auf einfache Weise mit berechnet werden. Wenn der Eingabevektor s hinreichend allgemein ist, d. h. wenn in (7) $k = r$ ist, so gelten die nach (15) bestimmten Koeffizienten $\gamma_i = \gamma_{ki}$ für beliebige Vektoren $s = A' f$, so daß die Gleichung (13) bei gleicher Matrix A für beliebige Vektoren f in (1) richtig bleibt.

Literatur

[1] R. ZURMÜHL, Matrizen, 1958, S. 336—343.

Anschrift: Dr. H. ELTERMANN, Braunschweig-Querum, Eichhahnweg 16a

Das Selbstpotential eines tetraedrischen Bereichs eines gleichnamigen kubischen Raumgitters (Würfelecktetraeder)

Von OTTO EMERSLEBEN*)

Der Bereich \mathfrak{T} , dessen Selbstpotential berechnet werden soll, ergibt sich wie folgt (wurde durch ein Modell erläutert):

Von einem würfelförmigen Bereich eines kubischen Raumgitters werde durch eine Oktaederfläche ein Tetraeder abgetrennt mit $n + 1$ Gitterpunkten pro Kante. Es handelt sich also um ein nichtreguläres Tetraeder von der Gestalt einer geraden Pyramide über einem gleichseitigen Dreieck, dessen Kanten die Länge $n \cdot a \sqrt{2}$ haben, wenn a die Gitterkonstante des Raumgitters ist. Die 3 anderen Kanten der Pyramide haben je die Länge $n \cdot a$ und bilden an der „Spitze“ der Pyramide eine rechtwinklige körperliche Ecke. Jeder Gitterpunkt dieses Würfelecktetraeders werde mit der gleichen Ladung e (bzw. Masse m) belegt.

Dann ist das Selbstpotential dieser Gitterpunktanordnung

$$\Phi_{\mathfrak{T}}(n+1) = \frac{e^2}{a} \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \varphi(\overline{P_k P_l}),$$

wenn $\varphi(r)$ das nur von der Entfernung r der Gitterpunkte abhängige Potential zweier Gitterpunkte P_k und P_l aufeinander ist und P_k sowie P_l unabhängig voneinander über alle voneinander verschiedenen Gitterpunkte des Gitters laufen. (Bei Massenanziehung statt elektrostatischer Abstoßung ist der Faktor e^2 durch $-f m^2$ zu ersetzen, f Gravitationskonstante.) Bei NEWTONSchem Potential, mit dem im folgenden gerechnet werden soll, ist also $\varphi(r) = 1/r$. Im physikalischen Einheitsgitter (mit $e^2/a = 1$) ist dann $\Phi_{\mathfrak{T}}(n+1)$ die Summe der reziproken Entfernungen der Gitterpunkte des Bereiches \mathfrak{T} voneinander. Eine Übersicht über berechnete Fälle des Selbstpotentials gleichnamiger Ladungsanordnungen bei Punktgittern siehe [1], § 3.

Für die 2. Differenz des Selbstpotentials einer äquidistanten Gittergeraden, die 3. Differenz des Selbstpotentials eines 3eckigen Netzes [2] und die 4. Differenz des Selbstpotentials eines tetraedrischen Gitterbereiches ([1], S. 184, Zusatz bei der Korrektur) haben sich Sätze ergeben, nach denen z. B. im vorliegenden Falle

$$\Delta_4 \Phi_{\mathfrak{T}}(n+1) = 3 \Psi_{\mathfrak{W}}^* + 3 \Psi_{\mathfrak{D}_r}^* + \Psi_{\mathfrak{D}_g}^* \dots \dots \dots (1).$$

Dabei bedeutet $\Psi_{\mathfrak{W}}^*$ das gegenseitige Potential der Gitterpunkte einer Tetraederkante zu den Gitterpunkten der dazu windschiefen Tetraederkante und der Stern (*), daß die endständigen Gitterpunkte je nur mit dem Gewicht $1/2$ zu rechnen sind; $\Psi_{\mathfrak{D}_r}^*$ bedeutet das Potential der Gitterpunkte einer der 3 Tetraederflächen von der Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks \mathfrak{D}_r im gegenüberliegenden Tetraedereckpunkte, $\Psi_{\mathfrak{D}_g}^*$ das Potential der Gitterpunkte der Tetraederfläche von der Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks \mathfrak{D}_g im gegenüberliegenden Tetraedereckpunkt (nämlich im Eckpunkt der rechtwinkligen körperlichen Ecke) und die Sterne bei diesen Punktdreiecks-Potentialen, daß von den Gitterpunkten der Dreiecke diejenigen an den Kanten nur mit Gewicht $1/2$, die an den Ecken nur mit Gewicht $1/4$ in die Rechnung eingehen. Für das Selbstpotential ergibt sich die polynomähnliche Darstellung

$$\Phi_{\mathfrak{T}}(n+1) = c_5 n^5 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0 + r(n) \dots \dots \dots (2)$$

mit $r(n) \sim c_{-1}/n$, wobei die c_k Konstanten sind.

Aus der rechten Seite von Gl. (1) erhält man mittels der EULERSchen Summenformel für das Hauptglied — ein Doppelintegral — den Wert $d_5 n$ mit

$$d_5 = (3 + \sqrt{2}) \Re \Im 1 - \frac{3}{2} \arcsin \frac{1}{3} - \frac{11}{12} \pi - 3\sqrt{2} \ln 3 \dots \dots \dots (3)$$

und hieraus $c_5 = d_5/5! = 0,04301\ 6998$. Siehe [3], IV.

*) Institut für Angewandte Mathematik der Universität Greifswald.

Die zweifachen Gittersummen auf der rechten Seite von Gl. (1) lassen sich noch weiter nach der EULERSchen Summenformel entwickeln. Unter Vorbehalt, darauf zurückzukommen, soll jedoch zunächst ein anderer einfacherer Weg beschrieben werden:

Für die übrigen Koeffizienten ergaben sich mittels numerischer Näherungsmethoden die Werte

$$\begin{aligned} c_3 &= -0,2220_8, \\ c_2 &= 0,021_1, \\ c_1 &= 0,159_5, \\ c_0 &= -0,006, \\ c_{-1} &\doteq 0,005. \end{aligned}$$

Bis auf das mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebende Restglied $r(n)$ sind weitere Glieder als diejenigen des vorstehenden Polynoms 5. Grades nicht festgestellt worden, also entweder nicht vorhanden oder so klein, daß es sich numerisch nicht auswirkte. Interessanterweise fehlen also insbesondere logarithmische Glieder, während schon beim Selbstpotential Φ_q eines quadratischen Bereichs eines quadratischen Gitters ein Glied der Größenordnung $n \ln n$ auftritt, desgleichen beim regulären 3eckigen Netz. [1] S. 183¹⁾.

Ferner tritt in dieser Darstellung kein biquadratisches Glied auf, wenn man, wie vorstehend geschehen, durch das Polynom in n das Selbstpotential $\Phi_x(n-1)$ darstellt, also mit $n-1$ Gitterpunkten pro Kante, d. h. bei einem Tetraeder, dessen Kanten die Längen $(n-2) \cdot a$ bzw. $(n-2) \cdot n \sqrt{2}$ haben.

Die benutzte numerische Methode bestand in folgendem:

Mit $\Phi_x(0) = \Phi_x(1) = 0$ und numerisch mit genügender Stellenzahl²⁾ berechneten Werten von $\Phi_x(n)$ für $n = 2, \dots, 12$ ergab sich $\Phi_x(n-1) - c_5 n^5$.

Hiervon wurden die Differenzen bis zur vierten berechnet; jedoch ergab sich, daß bereits die dritten Differenzen offenbar einem konstanten Grenzwert d_3 zustreben. Vgl. Tabelle 1, die in den ersten beiden Spalten die letzten Werte der dritten und vierten Differenz angibt.

Tabelle 2

| n | $r(n) = \Phi_x(n-1) - c_5 n^5 - c_3 n^3 - c_2 n^2 - c_1 n - c_0$ |
|-----|--|
| 1 | 0,00446 30017 |
| 2 | 0,00269 60516 |
| 3 | 0,00194 97351 |
| 4 | 0,00145 27915 |
| 5 | 0,00111 15764 |
| 6 | 0,00087 50506 |
| 7 | 0,00071 17689 |
| 8 | 0,00060 06056 |
| 9 | 0,00052 62657 |
| 10 | 0,00047 71120 |
| 11 | 0,00044 39590 |
| 12 | 0,00041 93490 |

Tabelle 1.

Differenzen von $\Phi_x(n-1) - c_5 n^5$

| Δ_3 | Δ_4 | $q(\Delta_4)$ |
|------------|--------------|---------------|
| -1,3325114 | | |
| -1,3325011 | 0,0000103193 | |
| -1,3324953 | 0,0000058312 | 0,5651 |
| -1,3324916 | 0,0000036573 | 0,6272 |
| -1,3324892 | 0,0000024520 | 0,6704 |
| -1,3324875 | 0,0000017279 | 0,7047 |

Daraus wurde als Grenzwert der dritten Differenz $d_3 = -1,33248$ geschätzt³⁾, so daß sich $c_3 = d_3/3! = -0,22208$ ergab. Mit diesem c_3 wurde nunmehr der Wert von $\Phi_x(n-1) - c_5 n^5 - c_3 n^3$ berechnet, davon die zweiten Differenzen und deren Grenzwert usf.

¹⁾ Zusatz bei der Korrektur (22. 6. 61): Unter Mitwirkung der Herren F. KERNDT u. H. KREIENBRING wurde inzwischen bewiesen, daß außer den polynomähnlichen Gliedern keine Glieder von höherer Größenordnung als $n \ln n$ auftreten und letztere nur mit einem derart kleinen Koeffizienten, daß sich ein solches zusätzliches Glied in (2) in der Tat bei vorstehenden Berechnungen nicht auswirkt.

Daher wäre eine Berücksichtigung dieser Feststellungen möglich durch Einführung eines zusätzlichen Gliedes $c \cdot n \ln n$ in (2) mit $c = (5\sqrt{2} - 6)/1440 = 0,0007438$.

²⁾ Das Institut für Angewandte Mathematik der Universität Greifswald besitzt in seiner Tabellenbibliothek eine Tabelle der Quadratwurzeln und reziproken Quadratwurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 1000 auf 20 Dezimalstellen.

³⁾ Diese „Schätzung“ erfolgte folgendermaßen: Tabelle 1 gibt in der letzten Spalte die Quotienten q der 4. Differenzen an. Diese steigen bis 0,7 und werden zweifellos für weitere (hier nicht berechnete) Glieder weiter steigen. Eine geometrische Folge mit diesem Quotienten, 0,7, kann daher als untere Schranke der weiteren Werte der 4. Differenz angenommen werden. Die Summe der in Tabelle 1 nicht mehr berechneten 4. Differenzen ist daher mindestens gleich einer geometrischen Reihe mit Quotienten 0,7 beginnend mit dem 0,7fachen des letzten Wertes der 4. Differenz d. h. $7/3 \cdot 0,0000017279 = 0,0000040264$. Dies abgezogen vom Betrage des letzten Wertes der 3. Differenz (Tabelle 1) ergibt hierfür höchstens den Wert 1,3324835. Falls die Summe der 4. Differenz aber doppelt so groß sein sollte, ergibt sich 1,3324795. Die Annahme 1,33248 erscheint daher gerechtfertigt.

Tabelle 2 zeigt den Verlauf des Restgliedes $r(n)$ für $n = 1, \dots, 12$, der sich mit den oben angegebenen Werten c_k ($k = 0, 1, 2, 3$) ergibt, wobei man beachte, daß der numerische Wert des konstanten Gliedes c_0 nur mit 3 Dezimalstellen, d. h. einer Ziffer in der 3. Dezimalstelle angenommen wurde, so daß die Werte der Tabelle 2 möglicherweise (etwa von der 4. Dezimalstelle ab) noch einen konstanten Anteil von c_0 enthalten. Berücksichtigt man aber, daß die zugehörigen Werte von $\Phi_{\mathbb{Z}}(n-1)$ von 0 bis zu Werten über 10 000 anwachsen — vgl. [3], Spalte 3 von Tabelle 3 — so kann man mit den Werten der Tabelle 2 als dem durch den numerisch ermittelten Polynomteil von $\Phi_{\mathbb{Z}}(n-1)$ nicht erfaßten Teil dieses Selbstpotentials wegen der durchweg geringen Beträge der Werte der Tabelle 2 und ihres monotonen Abfalls mit wachsendem n durchaus befriedigt sein.

Die Darstellung (2) ist die umfassendste asymptotische Darstellung, die bisher für einen gleichnamig belegten räumlichen Gitterbereich erhalten wurde und zwar mittels des skizzierten Näherungsverfahrens relativ einfach.

Literatur

- [1] O. EMERSLEBEN, Das Selbstpotential der Gitterpunkte in einem gleichseitigen Dreieck, *Math. Nachr.* **21** (1960), S. 160—192.
- [2] O. EMERSLEBEN, Berechnung des Selbstpotentials von Gitterpunktanordnungen mittels Differenzengleichungen. *ZAMM* **39** (1959), S. 366—368 = *Anwendungen Math.* Nr. 6, Greifswald 1959.
- [3] O. EMERSLEBEN, Die elektrostatische Gitterenergie von Tetraedern aus alternierend angeordneten gleichnamigen Netzebenen. *Wiss. Z. Univ. Greifswald* (im Druck).

Anschrift: Prof. Dr. O. EMERSLEBEN, Greifswald, Gerdingsstr. 9 und Berlin-Zehlendorf, Treibjagdweg 16

Die Berechnung der Knicklasten von Stäben mit stufenweise veränderlichem Trägheitsmoment mit Hilfe von programmgesteuerten elektronischen Rechenautomaten

Von J. FADLE

Dieses Problem läßt sich überraschend einfach in geschlossener Form aus der Knick-D.Gl.

$$y_i^{IV} + (\alpha_i k)^2 \cdot y_i'' = 0, \quad \alpha_i^2 = \frac{I_1}{I_i}, \quad k^2 = \frac{P}{E I_1} \quad \dots \quad (1)$$

für das Stabfeld i mit dem konstanten Trägheitsmoment I_i erledigen (vgl. Bild), wenn man die Lösung für die Knickbiegeline in der Form

$$y_i = C_1 x + C_2 + A_i \cos [\alpha_i k (x - x_{i-1})] + B_i \sin [\alpha_i k (x - x_{i-1})], \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

ansetzt. Bei n Feldern sind insgesamt $2(n+1)$ Integrationskonstante vorhanden, zu deren Berechnung $2(n-1)$ Übergangsbedingungen $y_i = y_{i+1}$, $y_i' = y_{i+1}'$ an den Sprungstellen $x = x_i$ sowie 4 Randbedingungen an den Trägern gegenüberstehen. Die Übergangsbedingungen liefern die einfachen Rekursionsformeln

$$\left. \begin{aligned} A_{i+1} &= A_i \cos(\bar{\alpha}_i \lambda) + B_i \sin(\bar{\alpha}_i \lambda), \\ B_{i+1} &= -\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}} [A_i \sin(\bar{\alpha}_i \lambda) - B_i \cos(\bar{\alpha}_i \lambda)], \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= \frac{h_i}{h_1} \alpha_i, \\ \lambda &= h_1 k \end{aligned} \quad \dots \quad (3).$$

Aus der für den 1. bis 3. EULER-Fall gleichen Randbedingung $x = l: M_n = 0$ oder $y_n'' = 0$ folgt wegen $\alpha_n h_n k = \bar{\alpha}_n \lambda$ die gemeinsame Knickgleichung

$$A_n \cos(\bar{\alpha}_n \lambda) + B_n \sin(\bar{\alpha}_n \lambda) \equiv A_{n+1}(\lambda) = 0 \quad \dots \quad (4),$$

während die übrigen Randbedingungen folgende Anfangswerte für A_1 und B_1 liefern:

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ EULER-Fall: } & A_1 = \text{bel.} = 1, \quad B_1 = 0, \\ 2. \text{ EULER-Fall: } & A_1 = 0, \quad B_1 = \text{bel.} = 1, \\ 3. \text{ EULER-Fall: } & A_1 = -\bar{n} \alpha_1 \lambda, \quad B_1 = \text{bel.} = 1; \quad \bar{n} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5).$$

Die Randbedingungen des 4. EULER-Falles liefern die einfachen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} x=0 \quad & \left\{ \begin{aligned} y_1=0: C_2 &= -A_1, \\ y_1'=0: C_1 &= -\alpha_1 k B_1 \end{aligned} \right. \quad \text{mit} \quad C_1 l = -\bar{n} \alpha_1 \lambda B_1, \\ x=l \quad & \left\{ \begin{aligned} y_n=0: A_n \cos(\bar{\alpha}_n \lambda) + B_n \sin(\bar{\alpha}_n \lambda) &\equiv A_{n+1} = A_1 + \bar{n} \alpha_1 \lambda B_1, \\ y_n'=0: -\frac{\alpha_n}{\alpha_1} [A_n \sin(\bar{\alpha}_n \lambda) - B_n \cos(\bar{\alpha}_n \lambda)] &\equiv B_{n+1} (\alpha_{n+1} = \alpha_1) = B_1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (6),$$

wenn nach (3) die nicht vorhandene Kennzahl α_{n+1} als α_1 definiert wird. Der lineare Aufbau der Rekursionsformeln (3) gestattet die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} A_{n+1}(\lambda) &= a_{1,n+1}(\lambda) \cdot A_1 + b_{1,n+1}(\lambda) \cdot B_1, \\ B_{n+1}(\lambda) &= a_{2,n+1}(\lambda) \cdot A_1 + b_{2,n+1}(\lambda) \cdot B_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{1,n+1} &= A_{n+1} (A_1 = 1, B_1 = 0), & b_{1,n+1} &= A_{n+1} (A_1 = 0, B_1 = 1), \\ a_{2,n+1} &= B_{n+1} (A_1 = 1, B_1 = 0), & b_{2,n+1} &= B_{n+1} (A_1 = 0, B_1 = 1). \end{aligned}$$

Nach Einführung von (7) in (6) folgen zwei homogene Gleichungen für A_1 und B_1 , und deren gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante liefert die Knickgleichung

$$4. \text{EULER-Fall: } \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{1, n+1}(\lambda) - 1, & b_{1, n+1}(\lambda) - \bar{n} \alpha_1 \lambda \\ a_{2, n+1}(\alpha_{n+1} = \alpha_1; \lambda), & b_{2, n+1}(\alpha_{n+1} = \alpha_1; \lambda) - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (8).$$

Der (theoretische) Sonderfall $\alpha_j = 0$, d. h. $I_j \rightarrow \infty$ erfordert eine gesonderte Behandlung, weil die Knickbiegeline dieses Feldes j in eine Gerade

$$\bar{y}_j = C_1 x + C_2 + A_j \cdot (x - x_{j-1}) + B_j$$

ausartet. Durch die Übergangsbedingungen

$$x = x_{j-1} : \begin{cases} y_{j-1} = \bar{y}_j, \\ y'_{j-1} = y'_j, \end{cases} \quad x = x_j : \begin{cases} \bar{y}_j = y_{j+1}, \\ \bar{y}'_j = y'_{j+1}. \end{cases}$$

werden die 4 Integrationskonstanten dieses ungleichartigen Feldes eliminiert, und man erhält die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} A_{j+1} &= A_{j-1} \cos (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda) + B_{j-1} \sin (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda) \\ &\quad - \alpha_{j-1} \frac{h_j}{h_1} \lambda [A_{j-1} \sin (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda) - B_{j-1} \cos (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda)], \\ B_{j+1} &= -\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j+1}} [A_{j-1} \sin (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda) - B_{j-1} \cos (\bar{\alpha}_{j-1} \lambda)] \end{aligned} \right\} \quad (9).$$

Die Weiterbehandlung erfolgt dann nach den gewöhnlichen Rekursionsformeln (3).

Nach dem Verfahren von HOLZER-TOLLE zur Berechnung der Eigenfrequenzen von Drehschwingungen geht man nun von einem gut geschätzten Wert λ_1 aus und berechnet nach (3) rekursiv $A_{n+1}(\lambda_1)$ bzw. $\Delta(\lambda_1)$, das zunächst von Null verschieden sein wird. Dann wird die Rechnung für andere Werte von λ so lange wiederholt, bis bei λ_{j+1} ein Vorzeichenwechsel eintritt. Nach der „regula falsi“ erhält man einen verbesserten Wert $\bar{\lambda}$ zu

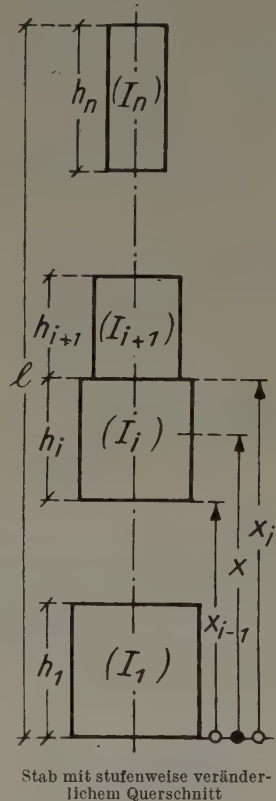
$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{j+1} f(\lambda_j) - \lambda_j f(\lambda_{j+1})}{f(\lambda_j) - f(\lambda_{j+1})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

In (10) steht $f(\lambda)$ stellvertretend für $A_{n+1}(\lambda)$ bzw. $\Delta(\lambda)$. Bei der wiederholten Anwendung von (10) ist aber zu beachten, daß dieses Interpolationsverfahren von der Krümmung der zunächst unbekannten Kurve $f(\lambda)$ abhängig ist. Diese Schwierigkeit wird durch die Substitutionen

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{\lambda}) > 0: f(\lambda_j) \rightarrow f(\bar{\lambda}), \\ f(\bar{\lambda}) < 0: f(\lambda_{j+1}) \rightarrow f(\bar{\lambda}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

umgangen, worauf die Interpolation nach (10) so lange fortgesetzt wird, bis $f(\bar{\lambda}_j)$ eine vorgegebene Schranke ε erreicht hat. Dann folgt mit $k = \frac{\lambda}{h_1} = \frac{\bar{n} \lambda}{l}$ die Knicklast P_k nach (1) zu

$$P_k = k^2 \cdot E I_1 = (\bar{n} \lambda)^2 \cdot \frac{E I_1}{l^2} (12).$$



Der einfache Aufbau der Rekursionsformeln (3) ist besonders für die Programmierung für elektronische Rechenautomaten geeignet. Die Programmierung selbst wurde von einem Hörer meiner Vorlesung über „Stabilitätsprobleme der Elastostatik“, Herrn MANUEL BORJA in sehr geschickter Weise gelöst und besteht aus 12 Unterabschnitten, davon zwei für den Sonderfall $\alpha_j = 0$ nach (9). Durch entsprechende Eingabe des Rechenstreifens kann jeder einzelne EULER-Fall für sich oder auch nacheinander alle vier EULER-Fälle durchgerechnet werden. Das Programm umfaßt 394 Trommelspeicheradressen.

Die Richtigkeit der Programmierung wurde sowohl an den klassischen EULER-Fällen sowie an einem Träger mit 10 verschiedenen Feldern und seinem gespiegelten Träger überprüft, bei dem sich für den 2. und 4. EULER-Fall wegen der symmetrischen Randbedingungen die gleichen Knicklasten ergeben müssen. Aus den Transformationsformeln gemäß

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_{n+1-i}}{\alpha_n}, \quad \left(\frac{h_i}{h_1}\right)' = \frac{h_{n+1-i}}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_n}, \quad \bar{n}' = \frac{h_n}{h_1} \cdot \bar{n}$$

kommen die Eigenwerte für den 2. und 4. EULER-Fall des gespiegelten Trägers zu

$$\lambda' = \left(\frac{h_n}{h_1} \alpha_n\right) \cdot \lambda.$$

Im besonderen folgt für $h_n \alpha_n / h_1 = 1$: $\lambda' = \lambda$. Für mehrere durchgerechnete Beispiele ergab sich völlige Übereinstimmung. Die reine Rechenzeit für alle 4 EULER-Fälle eines Stabes mit 10 Feldern betrug 12 Minuten.

Das Sonderprogramm für $\alpha_j = 0$ wurde an einem Stab kontrolliert, bei dem vier (nicht benachbarte) Felder mit $\alpha = 0$ angenommen wurden. Hierauf wurde $\alpha = 0$ der Reihe nach durch 0,0001, 0,001 und 0,1 ersetzt, um die Übereinstimmung bzw. Abweichung vom Sonderprogramm festzustellen. Die Rechnung wurde wieder für den ursprünglichen und gespiegelten Stab durchgeführt und ergab eine Abweichung der Ergebnisse für $\alpha = 0,1$ gegenüber denjenigen für $\alpha = 0$ für die 4 EULER-Fälle um 0,15%, 0,09%, 0,32% und 0,24%, während sich bei $\alpha = 0,001$ erst eine Abweichung in der 6. Kommastelle ergab.

Das zunächst nur für Stäbe mit stufenweise veränderlichen Querschnitten gültige Programm kann auch näherungsweise für eine stetige Veränderlichkeit des Querschnittes verwendet werden, wenn letztere durch eine entsprechende stufenweise approximiert wird. Als Beispiel wurde ein von DINNIK behandelter Stab mit konstantem Mittelquerschnitt von der Länge l_0 , der sich nach beiden Enden symmetrisch nach dem Gesetz

$$I = I_0 \left(1 - \frac{x}{b}\right)^m$$

verengt und durch

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{I_1}{I_0}} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^{\frac{1}{m}} \right] \frac{n+1-i}{n} \right\}^{-\frac{m}{2}}, \quad I_1 = I \left(x = \frac{l-l_0}{2}\right)$$

approximiert wird, nachgerechnet. Dabei ergab sich für $l_0/l = 0,6$, $I_1/I_0 = 0,4$ und für $m = 1, 2, 3, 4$ bei einer Unterteilung $n = 20$ ein Fehler von $-1,31\%$, $-1,12\%$, $-1,03\%$ und $-1,06\%$, also eine für die Praxis durchaus ausreichende Genauigkeit.

Die Rechnungen wurden auf dem Rechenautomaten Z 22 des Instituts für Angewandte Mathematik, Prof. WEISSINGER, der T.H. Karlsruhe durchgeführt.

Anschrift: Dozent Dr.-Ing. JOHANN FADLE, T. H. Karlsruhe, Institut für Mechanik

Zur Auswertung von Luftbildpaaren mit veränderten Kammerkonstanten

Von C. FRISCHMUTH

In der Arbeit, über die berichtet wurde, werden zwei Verfahren zur sogenannten Affin- auswertung von Luftbildpaaren entwickelt. Im ersten Verfahren wird eine bestimmte Ebene (Nullebene) richtig reproduziert. Da die Modellfehler außerhalb dieser Ebene stark anwachsen, ist das Verfahren für Gelände mit großen Höhenunterschieden nicht geeignet. Für solches Gelände werden im zweiten Verfahren zusätzliche Orientierungsgrößen angegeben, die bei kleinen Nadirdistanzen eine Auswertung ermöglichen. Die Modellfehler werden angegeben und abgeschätzt. Die Arbeit ist im Jenaer Jahrbuch 1960/II erschienen.

Anschrift: Dipl.-Math. CLAUD FRISCHMUTH, Jena, Gillestr. 19

Eine Anwendung des Eindeutigkeitssatzes von Cartan auf die Stabilität gewöhnlicher Differentialgleichungen im Komplexen

Von OTMAR GÖTZ*)

Es werde ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n) \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

unter folgenden Voraussetzungen betrachtet:

x_j seien komplexe Veränderliche und f_j holomorphe Funktionen in einem Gebiet G des C^n . Für jedes kompakt in G liegende Teilgebiet G^* gilt dann:

Zu jedem Punkt $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in G^*$ existiert eine Lösung $x_j(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$ in einem gewissen Intervall $|t| < \varrho$. Diese genügt der Anfangsbedingung $x_j(0, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j$ und definiert für $|t| < \varrho$ eine Familie von Abbildungen A_t des Gebietes G^* in den C^n . Da G^* zum Holomorphiegebiet der Funktionen f_j gehört, ist A_t für jedes feste t mit $|t| < \varrho$ holomorph in den Veränderlichen ξ_j ($j = 1, \dots, n$).

Definition: Ein Gebiet $G^* \subset G$ heiße Stabilitätsgebiet, wenn A_t für alle $t \geq 0$ eine innere Abbildung von G^* ist.

Die Frage nach der Stabilität einer Lösung des Systems (1) wird durch den folgenden Satz für eine gewisse Klasse von Funktionen f_j beantwortet:

Satz: Die Funktion $f_j(x_1, \dots, x_n)$ ($j = 1, \dots, n$) sei in der Umgebung $U: |x_j| \leq r$ des Nullpunktes (0) holomorph und ihre Potenzreihenentwicklung um (0) beginne mit Gliedern der Ordnung $k \geq 2$:

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 2} \sum_{v_1 + \dots + v_n = k} a_{v_1 \dots v_n}^j x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n} \quad (2).$$

Dann gibt es keine Umgebung $V \subset U$ des Nullpunktes, die Stabilitätsgebiet ist.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Umgebung V . Daraus können wir folgendermaßen schließen, daß die Abbildung $A_t: x_j(t, \xi_1, \dots, \xi_n)$ die identische Abbildung $x_j(t, \xi) = \xi_j$ für alle $t \geq 0$ ist:

Es sei

$$x_j(t, \xi_1, \dots, \xi_n) = a_1^j(t) \xi_1 + \dots + a_n^j(t) \xi_n + \sum_{\mu} h_{\mu}^j(t, \xi) \quad (j = 1, \dots, n)$$

die Potenzreihenentwicklung von A_t um $(\xi) = (0)$. Die Koeffizienten a_k^j der linearen Glieder können durch Koeffizientenvergleich mit (2) berechnet werden. Es ergibt sich

$$a_k^j(t) = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right)_{(\xi)=(0)} = c_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k, \\ 1 & \text{für } j = k. \end{cases}$$

Also lautet die Entwicklung der Abbildung A_t um (0):

$$A_t: x_j(t, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j + \sum_{\mu} h_{\mu}^j(t, \xi).$$

Da A_t für alle $t \geq 0$ nach Annahme eine innere Abbildung von $V(0)$ ist, folgt nach dem Eindeutigkeitssatz von CARTAN [1], daß $A_t: x_j(t, \xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_j$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung (2).

Literatur

- [1] HENRI CARTAN, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique, Journ. de Math. **10** (1931), p. 30.

Anschrift: OTMAR GÖTZ, Aachen, Krefelderstrae 4

*) Inst. f. Reine u. Angew. Mathematik, T.H. Aachen.

Über ein neues Kriterium in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale

Von R. KLÖTZLER

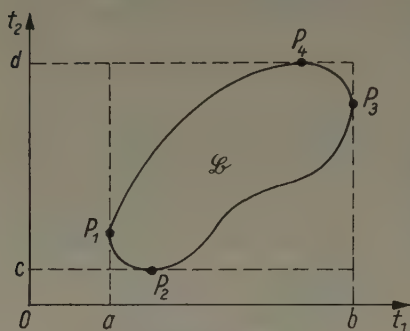
Es liege das (in Parametergestalt angegebene) Variationsproblem vor

$$\int_{\mathfrak{B}} f(x_i, p_{(i)}) dt_1 \dots dt_m \rightarrow \text{Min.} \quad (1),$$

wobei $f(x_i, p_{(i)})$ in einem gewissen Argumentbereich T fünfmal stetig differenzierbar sei, größer als Null ist und in den $p_{(i)}$ positiv homogen von erster Ordnung ist. Die zulässigen Funktionen $x_i = x_i(t_\alpha)$ mit $i = 1, \dots, n > m > 1$ sollen über dem beschränkten Parameterbereich \mathfrak{B} der Klasse D_1 angehören und auf dem Rande S von \mathfrak{B} vorgegebene Funktionswerte stetig annehmen. Die $p_{(i)}$ sind die zugehörigen Richtungsgrößen, und zwar ist

$$p_{(i)} \equiv p_{(i_1 \dots i_m)} = \frac{\partial(x_{i_1} \dots x_{i_m})}{\partial(t_1 \dots t_m)} \quad \text{mit } i_1 < \dots < i_m.$$

Es sei stets $p_{(i)} p_{(i)} \neq 0$ (wobei über alle möglichen Indexkombinationen summiert wird) und $(x_i, p_{(i)}) \in T$. Dann gliedert sich die klassische Behandlungsweise des Problems (1) in zwei



$S_u = \widehat{P_1 P_2}$ unterer Rand,
 $S_o = \widehat{P_2 P_3}$ oberer Rand,
 $S_l = \widehat{P_1 P_4}$ linker Rand,
 $S_r = \widehat{P_4 P_3}$ rechter Rand

Abschnitte auf: Zunächst ermittelt man die der Klasse C_2 angehörende Lösung E der EULERSchen Differentialgleichungen zu (1), die den gestellten Randbedingungen genügt, und anschließend diskutiert man die höheren Variationen zu (1) „längs“ E , um die Minimaleigenschaft dieser Lösung nachzuweisen. Man wird hierbei wiederum auf gewisse Rand- bzw. Eigenwertprobleme zu Systemen linearer partieller Differentialgleichungen geführt (vgl. etwa [3] u. [4]); diese Betrachtungen liefern aber i. allg. nur hinreichende und notwendige Kriterien für ein schwaches Extremum zu (1).

Um diesen Mangel zu beheben, hat C. CARATHÉODORY den Begriff des „geodätischen Feldes“ eingeführt und gezeigt, daß (unter gewissen Voraussetzungen an die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $f(x_i, p_{(i)})$ nach $p_{(i)}$) E dann eine (starke) Minimale zu (1) darstellt, wenn E in ein geodätisches Feld eingebettet werden kann. D. h., es ist zu $E: x_i = e_i(t_\alpha)$ in T ein Feld von Flächenelementen $(x_j, \pi_{(i)}(x_k))$ — das geo-

dätische Feld — mit stetig differenzierbaren Funktionen $\pi_{(i)}(x_k)$ zu finden, zu dem m zweimal stetig differenzierbare Funktionen $S_\alpha(x_k)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) angegeben werden können, die die Relationen

$$s_{(i)}(x_k) = f_{p_{(i)}}(x_k, \pi_{(j)}(x_k)) \quad \text{mit} \quad s_{(i)}(x_k) = s_{(i_1 \dots i_m)} = \frac{\partial(s_1 \dots s_m)}{\partial(x_{i_1} \dots x_{i_m})}$$

erfüllen. Hinzu kommt noch die „Einbettungsbedingung“ $\pi_{(i)}(e_k) = p_{(i)}^0$, wobei $p_{(i)}^0$ die Richtungskordinaten zu E sind.

Daß man eine gewissen Regularitätsvoraussetzungen genügende Lösung E der EULERSchen Differentialgleichungen im Kleinen stets in ein geodätisches Feld einbetten kann, wurde in [1] von H. BOERNER nachgewiesen (W. VELTE vereinfachte in [5] diesen Beweis wesentlich durch Übergang zur Parameterdarstellung). Die von RADON und E. HÖLDER aufgeworfene Frage nach der Existenz eines geodätischen Feldes im Großen konnte erst in den letzten Jahren vom Vortragenden vollständig geklärt werden¹⁾. Die hierbei erzielten Ergebnisse sollen an dem einfachen Variationsproblem

$$\iint_{\mathfrak{B}} [D(z_{t_1}^2 + z_{t_2}^2) - A z^2] dt_1 dt_2 \rightarrow \text{Min.} \quad (2)$$

mit der Randbedingung $z = 0$ auf S und E gleich $z^0 \equiv 0$ erläutert werden. $D(t_\alpha) > 0$ sei zweimal stetig differenzierbar über \mathfrak{B} und $A(t_\alpha)$ H -stetig. \mathfrak{B} sei einfach zusammenhängend, von einer stetig gekrümmten Kurve S berandet und weiterhin von der Art, daß sämtliche Parallelen zur t_1 - bzw. t_2 -Achse, welche innere Punkte von \mathfrak{B} enthalten, höchstens zweimal S schneiden.

¹⁾ Die entsprechenden allgemeinen Untersuchungen erscheinen demnächst in den Sitzungsberichten der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Führt man die Problemstellung (2) in Parametergestalt über, so liefert die allgemeine Theorie das Resultat:

Die Lösung $z^0 \equiv 0$ über ganz \mathfrak{B} läßt sich dann und nur dann in ein geodätisches Feld einbetten, wenn die Differentialgleichung

$$\frac{\partial(Du_{t_1})}{\partial t_1} v + \frac{\partial(Dv_{t_2})}{\partial t_2} u + A u v = 0 \quad \dots \quad (3)$$

über \mathfrak{B} ein zweimal stetig differenzierbares Lösungspaar (u^0, v^0) besitzt, zu dem u^0 und v^0 in keinem Punkte von \mathfrak{B} gleich Null sind. Diese Bedingung ist zugleich notwendig und hinreichend dafür, daß $z^0 \equiv 0$ eine Minimale zum Problem (2) ist.

Offensichtlich ist dieses Kriterium allgemeiner und zugleich einfacher als das entsprechende JACOBIsche Kriterium, das besagt: $z^0 \equiv 0$ ist dann und nur dann eine Minimale zum Problem (2), wenn über \mathfrak{B} eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(Du_{t_1})}{\partial t_1} + \frac{\partial(Du_{t_2})}{\partial t_2} + A u = 0$$

existiert. Da nämlich in (3) zwei gesuchte Funktionen u, v auftreten, kann man eine der beiden — etwa $v(t_\alpha)$ — von Null verschieden vorgeben, so daß man lediglich noch eine von dem Parameter t_2 zusätzlich abhängige gewöhnliche lineare Differentialgleichung für u zu betrachten hat.

Unabhängig von der allgemeinen Theorie kann man übrigens den zweiten Teil des obigen Resultats sehr leicht unmittelbar verifizieren. Wir beschränken uns hier auf den Nachweis des hinreichenden Charakters dieser Bedingung.

Ist (u^0, v^0) über \mathfrak{B} ein von Null verschiedenes Lösungspaar der Klasse C_2 , so setzen wir

$$B_0 = \frac{\partial(Dv_{t_2}^0)}{\partial t_2} \frac{1}{v^0}.$$

Für eine beliebige Vergleichsfunktion $v(t_\alpha) \neq 0$ zu $z^0 \equiv 0$ der Klasse D_1 gilt dann (den Ergebnissen der Variationsrechnung einfacher Integrale entsprechend) bei festem t_1 ($a < t_1 < b$)

$$\int_{s_u}^{s_o} (Dv_{t_2}^2 + B_0 v^2) dt_2 > 0 \quad \dots \quad (4),$$

da $v^0(t_\alpha)$ eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(Dv_{t_2}^0)}{\partial t_2} - B_0 v^0 = 0$$

ist. In entsprechender Weise gilt bei festem t_2 ($c < t_2 < d$)

$$\int_{s_l}^{s_r} (Dv_{t_1}^2 - [A + B_0] v^2) dt_1 > 0,$$

da $u^0(t_\alpha)$ wegen (3) eine von Null verschiedene Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial(Du_{t_1}^0)}{\partial t_1} + [A + B_0] u^0 = 0$$

ist.

Integriert man die linke Seite der letzten Ungleichung über t_2 von c bis d , die linke Seite von (4) über t_1 von a bis b , so erhält man durch Addition dieser beiden Resultate

$$\iint_{\mathfrak{B}} [D(v_{t_1}^2 + v_{t_2}^2) - A v^2] dt_1 dt_2 > 0 \quad \text{für } v \neq 0.$$

D. h., $z^0 \equiv 0$ ist über \mathfrak{B} eine Minimale.

Literatur

- [1] H. BOERNER, Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale, Math. Ann. **112** (1936), S. 187—220.
- [2] C. CARATHÉODORY, Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen, Ges. Math. Schriften **1**, S. 383 bis 426.
- [3] E. HÖLDER, Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung, Jahresber. d. DMV **62** (1959), S. 34—52.
- [4] R. KLÖTZLER, Bemerkungen zu einigen Untersuchungen von M. I. VIŠIK im Hinblick auf die Variationsrechnung mehrfacher Integrale, Math. Nachr. **17** (1958), S. 47—56.
- [5] W. VELTE, Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale, Math. Z. **60** (1954), S. 367—383.

Anschrift: Dr. ROLF KLÖTZLER, Leipzig N 42, Tauchaer Str. 198

Neuere Entwicklungen der Methode von Runge und Kutta^{*)}

Von J. KUNTZMANN

Wir erklären zuerst die Bezeichnungen. Wir schreiben ein Differentialsystem:

| | |
|--|--|
| $x^{(p)} = X(x, x', \dots, x^{(p-1)}, t)$ | x ist ein Vektor. |
| t_0, x_0, x'_0, \dots | sind die gegebenen Anfangswerte. |
| t_i, x_i, x'_i, \dots | sind die Werte am Anfang des $(i + 1)$ -ten Schrittes. |
| h | ist die Schrittweite. |
| $t_{i,\alpha} = t_i + h \theta_\alpha, \quad x_{i,\alpha}, x'_{i,\alpha}, \dots$ | sind die Zwischenwerte. |
| $X_{i,\alpha} = X(x_{i,\alpha}, x'_{i,\alpha}, \dots, t_{i,\alpha})$ | |

Die RUNGE-KUTTASchen Formeln lauten (unabhängig von p):

$$x_{i,0}^{(p-k)} = x_i^{(p-k)} \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

$$x_{i,\alpha}^{(p-1)} = x_i^{(p-1)} + h \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} A_{\alpha,\beta} X_{i,\beta}$$

$$x_{i,\alpha}^{(p-k)} = x_i^{(p-k)} + \frac{h \theta_\alpha}{1!} x_i^{(p-k+1)} + \dots + \frac{h^k}{k!} \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} K_{\alpha,\beta} X_{i,\beta}$$

$$x_{i,q}^{(p-k)} = x_{i+1}^{(p-k)}.$$

Die klassische RUNGE-KUTTA-Methode ist eine Spezialisierung dieser Formeln mit $q = 4$
 $\theta_1 = 1/2 = \theta_2, \quad \theta_3 = 1.$

I. Total implizite Formeln ($p = 1$)

Es ist bekannt, daß RUNGE-KUTTA-Formeln mit einem Fehler nach dem ersten Schritt von der Ordnung h für $q = 1, 2, 3, 4$ existieren, aber nicht für $q = 5$ und vermutlich auch nicht für $q > 5$. Das kommt daher, daß die Anzahl der Bedingungen schneller wächst als die Anzahl der unbekannten Koeffizienten. Das bringt uns dazu, die Anzahl der Koeffizienten zu vergrößern, indem wir β von 0 bis $q - 1$ laufen lassen. Wir bekommen also implizite Formeln. Für solche Formeln ist es nicht notwendig, X_i (Wert von X am Anfang des Schrittes) zu benutzen. Wir wählen deshalb eine andere Schreibart:

$$\begin{aligned} x_{i,\alpha} &= x_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{\alpha,\beta} X_{i,\beta}, \\ x_{i+1} &= x_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q,\beta} X_{i,\beta}, \end{aligned} \quad \left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 0, 1, \dots, q-1.$$

$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q-1}$ sind beliebige, voneinander verschiedene Werte. Wir nehmen für die $A_{\alpha,\beta}$ die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{\alpha,\beta} \theta_\beta^r &= \frac{\theta_\alpha^{r+1}}{r+1} & \left. \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} &= 0, 1, \dots, q-1 & \dots & (1), \\ \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{q,\beta} \theta_\beta^r &= 1/(r+1) & r &= 0, 1, \dots, q-1 & \dots & (2). \end{aligned}$$

Die $A_{\alpha,\beta}, A_{q,\beta}$ sind genau bestimmt. Die Gleichungen (1) (2) geben die Koeffizienten wohl bekannter Quadraturformeln, und daher ergibt sich:

$$x_i(t_i + h \theta_\alpha) = x_i + h \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{\alpha,\beta} X(t_i + h \theta_\beta) + O(h^{q+1}).$$

Daraus folgt fast unmittelbar, daß

$$x_{i,\alpha} - x_i(t_i + h \theta_\alpha)$$

und $x_{i+1} - x_i(t_{i+1})$ von der Ordnung h^{q+1} sind.

Wir formulieren dieses Ergebnis: Die klassische Quadraturformel (2) kann zu einer Formel für die Integration von Differentialgleichungen durch Adjunktion der Bedingungen (1) erweitert werden. Solche Formeln existieren für jeden Wert von q .

^{*)} Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

Wir wählen jetzt für die θ_α die Abszissen von GAUSS im Intervall (0,1). Die Ordnung der korrespondierenden Formel ist genau die Ordnung der Formel von GAUSS, das heißt

$$x_i(t_{i+1}) - x_{i+1} = O(h^{2q+1}).$$

Der Beweis folgt ohne Schwierigkeit aus den folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=0}^{q-1} A_{\alpha,\beta} \theta_\beta^r &= \frac{\theta_\alpha^{r+1}}{r+1} + S_{\alpha,r} & r = q, \dots, 2q-1 \text{ (Definition der } S_{\alpha,r}), \\ \sum_{\alpha=0}^{q-1} A_{q,\alpha} \theta_\alpha^r S_{\alpha,\beta} &= 0 & \beta = q, \dots, 2q-r-2, \\ \sum_{\alpha=0}^{q-1} A_{q,\alpha} \theta_\alpha^r A_{\alpha,\beta} &= A_{q,\beta} \frac{(1 - \theta_\beta^{r+1})}{r+1} & r = 0, \dots, q-1. \end{aligned}$$

Man muß beachten, daß diese Ergebnisse nur für $p = 1$ gültig sind.

II. Anwendung der Runge-Kuttaschen Idee für Methoden mit abhängigen Schritten

Die Methoden mit abhängigen Schritten sind Methoden, bei denen x_{i+1} mit Hilfe der Werte

$$x_i, x_{i-1}, \dots$$

ausgedrückt wird (Beispiel ADAMSCHEs Verfahren). Eine oft verwendete Idee zur Ermittlung solcher Formeln ist die folgende: wir wünschen einen Wert x_{i+1} von hoher Ordnung. Wir berechnen zuerst einen vorläufigen Wert x_{i+1}^* von niedrigerer Ordnung, wir setzen diesen Wert in das rechte Glied einer Quadraturformel:

$$x(t_{i+1}) = x(t_{i-\alpha}) + \int_{t_{i-\alpha}}^{t_{i+1}} X(t) dt,$$

um einen besseren Wert zu bekommen, usw. So klettern wir mühsam bis zur gewünschten Ordnung.

Der Gedankengang der RUNGE-KUTTASCHEN Methode ist ganz anders: wir berechnen Zwischenwerte, bemühen uns jedoch nicht darum, diese Werte zu verbessern. Unser einziges Ziel ist, den bestmöglichen endgültigen Wert zu erhalten. Wie in der klassischen RUNGE-KUTTA-Methode ist eine mühsame Rechnung erforderlich, um die Koeffizienten einer solchen Methode zu bestimmen. Wir geben zwei Beispiele:

a) $p = 1$, θ beliebig,

$$\begin{aligned} x_{i,1} &= (1 - 3\theta^2 - 2\theta^3)x_i + \theta^2(3 + 2\theta)x_{i-1} + h[(\theta + 2\theta^2 + \theta^3)X_i + \theta^2(1 + \theta)X_{i-1}], \\ x_{i+1} &= \frac{8(1-\theta)}{1+2\theta}x_i + \frac{10\theta-7}{1+2\theta}x_{i-1}, \\ &\quad + h\left[\frac{8\theta^2-2\theta-2}{\theta(1+2\theta)}X_i + \frac{4\theta^2-2}{(\theta+1)(1+2\theta)}X_{i-1} + \frac{2}{\theta(1+\theta)(1+2\theta)}X_{i,1}\right]. \end{aligned}$$

Der Fehler nach einem Schritt ist für diese Formel $O(h^3)$. Die Stabilitätsbedingung ist für $1/2 < \theta < 1$ erfüllt.

b) System $x'' = X(x, t)$ (System ohne erste Ableitung)

Wir schlagen vor, die erste Ableitung gar nicht in Betracht zu ziehen. Wir geben beispielsweise folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 0,5 & \theta_3 &= -0,2, \\ x_{i,2} &= x_i + 0,5(x_i - x_{i-1}) + \frac{h^2}{2000}(625X_i + 125X_{i-1}), \\ x_{i,3} &= x_i - 0,2(x_i - x_{i-1}) + \frac{h^2}{90000}(-5664X_i - 2432X_{i-1} + 896X_{i,2}), \\ x_{i+1} &= 2x_i - x_{i-1} + \frac{h^2}{168}(-28X_i + 7X_{i-1} + 64X_{i,2} + 125X_{i,3}). \end{aligned}$$

Der Fehler nach dem ersten Schritt ist $O(h^6)$.

III. Runge-Kuttasche Methode für Integrodifferentialgleichungen vom Volterraschen Typ

Die folgende Bemerkung wird nützlich sein: In der RUNGE-KUTTASchen Methode sind, wie schon betont, die Zwischenwerte keine guten Werte (gewisse dieser Werte sind $O(h^2)$). Obgleich diese Werte schlecht sind, ist es möglich, einen guten Wert des Integrals:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(x, x', \dots, x^{(p)}, t) dt \quad (F \text{ beliebige Funktion})$$

zu erhalten. Wir setzen nämlich:

$$z(t) = \int_{t_0}^t F(x, x', \dots, x^{(p)}, u) du.$$

Um Werte von $z(t)$ zu bekommen, genügt es, das System

$$x^{(p)} = X(x, x', \dots, x^{(p-1)}, t) \quad z' = F(x, x', \dots, x^{(p)}, t)$$

zu lösen. Mit anderen Worten, die Formel

$$z_{i+1} = z_i + h \sum_{\alpha} A_{g,\alpha} F_{i,\alpha}$$

gibt einen Fehler von der Ordnung h^q .

Wir gehen jetzt zu den Integrodifferentialsystemen über. Wir betrachten folgendes allgemeine System:

$$x^{(p)}(t) = F[x(t), x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t), t, \int_{t_0}^t G[x(t), \dots, x^{(p-1)}(t), s, x(s), \dots, x^{(p)}(s)] ds.$$

Es ist mir nicht bekannt, ob für ein so allgemeines System Existenzsätze formuliert worden sind. Es wurde [1], [2] bewiesen, daß die RUNGE-KUTTASche Methode auf ein System der geschilderten Art angewandt werden kann. Genauer gesagt, besteht jeder Schritt der Lösung aus zwei Teilen:

- erstens aus der Rückführung auf den ersten Schritt für ein anderes System,
- zweitens aus der Ausführung dieses ersten Schrittes.

Wir stellen uns vor, daß die Lösung für $t < t_i$ schon bekannt ist und schreiben für $t < t_i$

$$\int_{t_0}^t G(\dots) ds = \int_{t_0}^{t_i} G(\dots) ds + \int_{t_i}^t G(\dots) ds.$$

Das erste Integral kann als eine Funktion von $x(t), x'(t), \dots, x^{(p-1)}(t)$ betrachtet werden, und wir schreiben daher:

$$x^{(p)}(t) = H \left[x(t), \dots, x^{(p-1)}(t), t, \int_{t_i}^t G(\dots) ds \right].$$

Wir müssen zeigen, wie wir diese neue Funktion praktisch behandeln können. Es genügt zu zeigen, wie wir das Integral

$$\int_{t_0}^{t_i} G ds$$

approximieren. Wir benützen dazu die Approximation

$$h \sum_{i,\alpha} A_{g,\alpha} G(x(t), \dots, x^{(p-1)}(t), t, t_{i,\alpha}, x'_{i,\alpha}, \dots, x^{(p)}_{i,\alpha})$$

mit einem Fehler der Ordnung h^q .

Wir erklären jetzt, wie wir den ersten Schritt für das neue System ausführen. Wir nehmen an, daß die folgende Entwicklung möglich ist:

$$G(x(t), \dots, t, s, x(s) \dots) = \sum_{u,v,\dots} M_{u,v,\dots}(t, x(t), \dots, x^{(p-1)}(t)) (s - t_i)^u (x(s) - x(t_i))^v + O(h^Q) \quad (Q \gg q).$$

Wenn wir diese Terme in h^Q wegstreichen, können wir unser System durch das folgende ersetzen:

$$z'_{u,v,\dots} = (t - t_i)^u (x(t) - x(t_i))^v, \dots, \quad x^{(p)}(t) = H(x(t), \dots, t, \sum_{u,v,\dots} M_{u,v,\dots} z_{u,v,\dots}(t))$$

mit

$$z_{u,v,\dots}(t_i) = 0.$$

Es ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf das wir die RUNGE-KUTTA-schen Formeln anwenden können.

Literatur

- [1] P. POUZET, Méthode d'intégration numérique de l'équation intégrale de Volterra de 2^o espèce, Comptes Rendus **250** (1960), p. 3101—3102.
 [2] P. POUZET, Intégration numérique des équations intégrales de Volterra, Comptes Rendus **250** (1960), p. 3269—3270.

Anschrift: Prof. Dr. J. KUNTZMANN, Université de Grenoble, Institut Fourier, Place Doyen-Gosse, Grenoble, France

Zur Behandlung schlecht konditionierter Systeme in der Ausgleichsrechnung

Von PETER LÄUCHLI*)

Die Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate führt auf lineare Gleichungssysteme. In manchen Fällen sind diese Systeme sehr schlecht konditioniert, was dann zur Folge hat, daß die Unbekannten numerisch nur schlecht bestimmt werden können.

Es soll im folgenden eine Methode skizziert werden, welche diese schlecht konditionierten Gleichungssysteme durch bessere ersetzt. Gleichzeitig ergeben sich dann bei einer iterativen Auflösung der modifizierten Gleichungen in jedem Schritt beidseitige Schranken für die Quadratsumme der Verbesserungen, die Größe nämlich, welche minimalisiert werden soll.

Wir notieren die Fehlergleichungen in der Form

$$C y - l = v,$$

wo C eine $(m \times n)$ -Matrix vom Rang m ist. Die m Unbekannten y_i sind so zu bestimmen, daß $(v, v) = \text{Min}$. Diese Forderung führt auf die Normalgleichungen

$$C^T v = C^T C y - C^T l = 0.$$

Man kann nun zu neuen Unbekannten y' übergehen, indem man C mit einer regulären $(m \times m)$ -Matrix R transformiert: $y = R y'$, $C R y' - l = C' y' - l = v$ (z. B. Orthogonalisierung von C).

Wir wählen R so, daß C' im oberen Quadrat die m -reihige Einheitsmatrix E_m enthält. Unten bleibt eine $((n - m) \times m)$ -Matrix B . Das leistet die sogenannte JORDAN-Transformation. Dabei lassen wir natürlich auch eine allgemeine Auswahl der Pivotelemente zu, welche man sich durch vorgängige Vertauschung von Zeilen und Spalten von C entstanden denken kann.

Damit ergeben sich die transformierten Normalgleichungen mit der Koeffizientenmatrix $C'^T C' = E_m + B^T B$, und wenn man nun deren Kondition (d. h. das Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Eigenwert) mit derjenigen der ursprünglichen Matrix $C^T C$ vergleicht, so findet man, daß die Kondition im letzteren Falle beliebig schlecht werden kann, nämlich bei fast abhängigen Spalten von C , wogegen die Eigenwerte λ von $C'^T C'$ folgendermaßen eingeschränkt werden können:

Trivialerweise ist $1 \leq \lambda$. Ferner gilt der Satz, daß bei Pivotauswahl nach dem absolut größten Element $\lambda \leq 1 + \frac{1}{3}(n - m)(4^m - 1)$ bleibt, falls nur C den Rang m hat.

Zwar kann die prinzipielle numerische Schwierigkeit, welche in der Behandlung schlecht konditionierter Ausgleichungsaufgaben liegt, nicht einfach weggezaubert werden; hingegen haben Versuche doch eindeutig bewiesen, daß in Fällen, wo die übliche Methode versagt — wenn z. B. $C^T C$ innerhalb der Rechengenauigkeit singulär wird — doch dank der Konditionsverbesserung der JORDAN-Transformation noch brauchbare Resultate erzielt werden können.

Zum zweiten Punkt, nämlich den (v, v) -Schranken, mögen folgende Andeutungen genügen:

Bekanntlich kann man sich bei einer iterativen Behandlung von Normalgleichungen deren explizite Aufstellung ersparen. Dafür hat man in unserem Falle in jedem Schritt je einmal die Matrix B und die Transponierte B^T mit einem Vektor zu multiplizieren. Das bedeutet aber, daß man ständig zwischen der durch die Spalten von C aufgespannten Ebene F' und ihrem durch den Punkt l verschobenen orthogonalen Komplement F'' hin und herspringt. (Der Lösungspunkt im n -dimensionalen Raum ist der Schnittpunkt von F' und F'').

*) Institut für angewandte Mathematik der ETH, Zürich.

Sei nun x' ein beliebiger Punkt aus F' , x'' ein solcher aus F'' , ferner $v' = x' - l$, $v'' = x'' - l$, dann gelten folgende Abschätzungen:

$$\frac{(v', v'')^2}{(v'', v'')} \leq (v, v) \leq (v', v').$$

Die obere Schranke ist trivial, die untere folgt aus einfachen geometrischen Überlegungen (Hypocircle).¹

Eine ausführliche Arbeit über diesen Gegenstand ist in *Numerische Mathematik* 3 (1961), S. 226—240 erschienen.

Anschrift: Dr. P. LÄUCHLI, Guggenbühlstr. 51, Winterthur 4, Schweiz

Über die Randwertaufgaben des Außenraumes zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung

Von ROLF LEIS

Die DIRICHLETSche und die NEUMANNsche Randwertaufgabe des Außenraumes sind im Falle glatter Berandungen für die HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung eindeutig lösbar. Nach dem Verfahren der Integralgleichungsmethode geht man dazu in der Ebene, beim DIRICHLETSchen Problem etwa, folgendermaßen vor:

Die Ebene werde von einer (oder mehreren) geschlossenen doppeltpunktfreien Kurven \mathfrak{C} in das Äußere G_a und das Innere G_i zerlegt. Es ist eine Funktion $U(\mathfrak{x})$ mit folgenden Eigenschaften gesucht

1. $\Delta U + k^2 U = 0$ in G_a ,
2. $\frac{\partial U}{\partial R} = i k U + o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ für $R \rightarrow \infty$,
3. $U(\mathfrak{C}) = \gamma$ (γ stetig).

Zur Lösung der Aufgabe bezeichnen wir ($\mathfrak{x} \in G_a$; $\mathfrak{z} \in \mathfrak{C}$)

$$Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \frac{i}{2} H_0^1(k|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|); \quad K(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = \frac{\partial}{\partial n_{\mathfrak{z}}} Q(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$$

und machen den Ansatz

$$U(\mathfrak{x}) = \int_{\mathfrak{C}} \mu(\mathfrak{z}) K(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) ds_{\mathfrak{z}}.$$

Auf Grund der Sprungrelation folgt aus diesem Ansatz für $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{C}$

$$\gamma(\mathfrak{z}) = \mu(\mathfrak{z}) + \int_{\mathfrak{C}} \mu(\mathfrak{z}') K(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') ds_{\mathfrak{z}'} \dots \dots \dots (1).$$

Im Falle der NEUMANNschen Randwertaufgabe gelangt man auf ähnliche Weise zur (vom Vorzeichen abgesehen) transponierten Integralgleichung

$$\gamma(\mathfrak{z}) = -\mu(\mathfrak{z}) + \int_{\mathfrak{C}} \mu(\mathfrak{z}') K(\mathfrak{z}', \mathfrak{z}) ds_{\mathfrak{z}'} \dots \dots \dots (2).$$

Es läßt sich zeigen, daß die auftretenden Operatoren vollstetig sind, so daß für Integralgleichungen (1) und (2) die FREDHOLMSche Alternative gültig ist. Der Fall, daß Eigenlösungen auftreten, kann nach der Kapazitätsmethode von H. WEYL [1] und C. MÜLLER [2] behandelt werden. Die gesuchte Lösung $U(\mathfrak{x})$ läßt sich als Summe einer einfachen und einer Dipolbelegung darstellen.

Es ist nun unser Ziel, die entsprechenden Aufgaben zu lösen, wenn man von der Berandung nur stückweise Glattheit voraussetzt. Daß man in diesem Falle die Integralgleichungsmethode in ihrer üblichen Form nicht mehr anwenden kann, ersieht man schon am einfachen Beispiel eines Quadrates. Der Operator in Gl. (2) angewandt auf eine Konstante wird nämlich an den Ecken logarithmisch singular.

Dadurch werden wir dazu geführt, zur Auflösung der Integralgleichungen funktional-analytische Methoden zu verwenden und die Normen anders zu wählen; wir werden die Gleichungen also in anderen Räumen diskutieren. Um die Darstellung hier nach Möglichkeit zu vereinfachen, beschränken wir uns dabei auf den zweidimensionalen Fall und nehmen an, daß die Randkurve \mathfrak{C} stückweise glatt ist und in der Umgebung der Ecken geradlinig verläuft. Außerdem behandeln wir nur die DIRICHLETSche Randwertaufgabe.

Als erstes zeigen wir, daß es höchstens eine überall beschränkte Lösung gibt. Dazu setzen wir von der Differenz $U = U_1 - U_2$ zweier Lösungen zunächst voraus, daß einmal

$$\operatorname{Im} \int_{C_r} U \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} ds = o(1) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

gilt, wobei C_r der in G_a gelegene Teil des Kreises um eine Ecke ist, und daß zweitens die ersten partiellen Ableitungen von U in regulären Punkten des Randes existieren. Dann folgt aus der Ausstrahlungsbedingung durch Anwendung der GREENSchen Formel (K_R ist ein genügend großer Kreis mit dem Radius R)

$$\int_{K_R} \left(\frac{\partial U}{\partial R} - i k U \right) (\bar{U} + i k \bar{U}) ds = \int_{K_R} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial R} \right|^2 + k^2 |U|^2 \right) ds = o(1) \quad \dots \dots \dots (4)$$

für $R \rightarrow \infty$. Nach einem Ergebnis von RELICH [3] folgt daraus, daß U in G_a identisch verschwindet.

Um zu zeigen, daß die erste Bedingung erfüllt ist, entwickeln wir U in der Umgebung der Ecken in eine FOURIER-Reihe

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \varphi \quad \dots \dots \dots (5)$$

und finden für $g_n(r)$

$$g_n(r) = C_{1n} J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(r) + C_{2n} N_{\frac{n\pi}{\alpha}}(r) \quad \dots \dots \dots (6).$$

Da U als beschränkt vorausgesetzt wurde, folgt $C_{2n} = 0$ und daher Gl. (3). Den Nachweis, daß die ersten partiellen Ableitungen von U in regulären Punkten P existieren, erbringen wir durch explizite Darstellung von U im Inneren einer glatten Kurve, die eine Umgebung von P enthält.

Wir zeigen nun die Existenz einer Lösung. Dazu setzen wir

$$K\mu = \int_{\mathfrak{C}} \mu(\mathfrak{z}') K(\mathfrak{z}', \mathfrak{z}) ds_{\mathfrak{z}'} \quad \dots \dots \dots (7)$$

und diskutieren die zum DIRICHLETSchen Problem formal adjungierte Integralgleichung

$$\gamma = \mu + K\mu \quad \dots \dots \dots (8)$$

im Raum L^1 der auf \mathfrak{C} absolut integrierbaren Funktionen. Als Norm wählen wir also

$$\|\mu\| = \int_{\mathfrak{C}} |\mu| ds \quad \dots \dots \dots (9).$$

Die zu (8) transponierte Gleichung (unsere ursprüngliche) bezeichnen wir mit

$$\Gamma = M + K^* M \quad \dots \dots \dots (10)$$

und diskutieren sie im Raum $L^{1*} = L^\infty$ (der Raum der fast überall beschränkten Funktionen).

Die Beschränktheit von $K\mu$ folgt aus

$$\int_{\mathfrak{C}} |K(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')| ds_{\mathfrak{z}'} \leq C < \infty \quad \dots \dots \dots (11).$$

Da K jedoch nicht mehr vollstetig ist, läßt sich nicht ohne weiteres schließen, daß für Gl. (8) und (10) die FREDHOLMSche Alternative gültig ist. Wir benötigen vielmehr folgenden Satz

Lemma: Es seien K bzw. K^* lineare Transformationen der konjugierten BANACH-Räume \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* . Es gebe eine vollstetige lineare Transformation L in \mathfrak{B} mit $\|K - L\| < 1$. Dann gilt für die Integralgleichungen

$$\gamma = (E + K)\mu \text{ in } \mathfrak{B} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma = (E + K^*)M \text{ in } \mathfrak{B}^*$$

die FREDHOLMSche Alternative.

Um dieses Ergebnis anzuwenden, setzen wir

$$K_h \mu = \begin{cases} K\mu & \text{in } \mathfrak{C} - C_h \\ 0 & \text{in } C_h \end{cases} \quad \dots \dots \dots (12),$$

wobei C_h der Teil von \mathfrak{C} ist, der im Inneren von Kreisen mit dem Radius h um die Ecken liegt. Bei festem h ist K_h vollstetig. Ferner gilt

$$\|K - K_h\| \leq \sup_{\mathfrak{z}', c_h} \int_{C_h} |K(\mathfrak{z}', \mathfrak{z})| ds_{\mathfrak{z}} \quad \dots \dots \dots (13).$$

Aus der Sprungrelation folgt daraus für festes, genügend klein gewähltes h

$$\|K - K_h\| < 1 \quad \dots \quad (14).$$

Für unsere Integralgleichungen gilt mithin die FREDHOLMSche Alternative. Wir müssen jedoch das Auftreten von Eigenlösungen diskutieren. Dies geschieht weitgehend analog zum glatten Fall nach der Kapazitätsmethode. Es sei $\eta \in L^1$ eine Eigenlösung von

$$0 = \eta + K \eta \quad \dots \quad (15).$$

Dann betrachten wir

$$V(x) = \int_{\mathbb{C}} \eta(z') Q(x, z') ds_{z'} \quad \dots \quad (16)$$

und erhalten in der Umgebung der Ecken aus

$$\int_0^\alpha |V(r, \varphi)| d\varphi = o(\lg r) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad \dots \quad (17)$$

durch Entwicklung nach Kugel- und BESSEL-Funktionen die Beschränktheit von $V(x)$. Die Lösung unserer Randwertaufgabe hat dann die Gestalt

$$U(x) = \int_{\mathbb{C}} \{M(z) K(x, z) + \eta(z) Q(x, z)\} ds_z \quad \dots \quad (18).$$

Literatur

- [1] H. WEYL, Math. Z. **55** (1952), S. 187.
 [2] C. MÜLLER, Math. Z. **56** (1952), S. 80.
 [3] F. RELICH, Jahresber. d. dt. Math.-V. **53** (1943), S. 57.

Anschrift: Doz. Dr. R. LEIS, Institut für Reine u. Angew. Mathematik der Technischen Hochschule Aachen

Über die Anwendung der Matrizenrechnung auf Wärmeprobleme*)

Von V. LOVASS-NAGY

Bezeichnungen

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet eine quadratische Matrix;}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet eine Spaltenmatrix;}$$

$\alpha^* = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ bezeichnet eine Zeilenmatrix (Transponierte der Spaltenmatrix α);

$\mathfrak{E}^{(n)}$ bezeichnet eine Einheitsmatrix n -ter Ordnung;

$$\mathfrak{E}^{(n)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet die sog. „gleichmäßige Kontinuante“ } n\text{-ter Ordnung;}$$

$$\lambda_k^{(n)} = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \text{bezeichnet den } k\text{-ten Eigenwert von } \mathfrak{E}^{(n)};$$

*) Der vorliegende Vortrag wurde für die GAMM-Tagung angemeldet, konnte aber nicht gehalten werden.

$$b_k^{(n)*} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{k\pi}{n+1}, \sin \frac{2k\pi}{n+1}, \dots, \sin \frac{nk\pi}{n+1} \right]$$

bezeichnet den zum Eigenwert $\lambda_k^{(n)}$ gehörenden linksseitigen Eigenvektor von $\mathbb{G}^{(n)}$;

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \mathfrak{B} & a_{12} \mathfrak{B} & \dots & a_{1m} \mathfrak{B} \\ a_{21} \mathfrak{B} & a_{22} \mathfrak{B} & \dots & a_{2m} \mathfrak{B} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \mathfrak{B} & a_{m2} \mathfrak{B} & \dots & a_{mm} \mathfrak{B} \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet das „direkte Produkt“ der Matrizen } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B};$$

u = Temperatur;

t = Zeitkoordinate;

x, y, z kartesische Ortskoordinaten eines inneren Punktes;

ξ, η, ζ kartesische Ortskoordinaten eines Randpunktes;

i, j, k Ortsindices eines inneren Gitterpunktes;

μ, ν, ϱ Ortsindices eines auf der Oberfläche liegenden Gitterpunktes;

ε = spez. Gewicht;

c = spez. Wärme;

κ = Wärmeleitfähigkeit;

$$\alpha^2 = \frac{\kappa}{c \cdot \varepsilon} = \text{Temperaturleitzahl.}$$

Wie bekannt, wird der Wärmeleitungsvorgang in den inneren Punkten eines homogenen und isotropen festen Körpers, dessen Stoffkonstanten (spez. Gewicht, spez. Wärme, Wärmeleitfähigkeit) von der Temperatur unabhängig sind, durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

beherrscht. Ferner gilt für $t = 0$

$$u(x, y, z; 0) = w(x, y, z) \dots \dots \dots (2).$$

Schließlich wird angenommen, daß die Randbedingung für einen beliebigen Punkt der Oberfläche sich in der Form

$$u(\xi, \eta, \zeta; t) = g(t) \dots \dots \dots (3)$$

ergibt (Randbedingung „erster Art“).

Im folgenden wird der zu betrachtende feste Körper durch ein quadratisches Punktgitter ersetzt und die gesuchte Temperaturverteilung durch die zu den Gitterpunkten gehörigen Temperaturwerte angenähert. Dementsprechend sollen die Ableitungen nach den Ortskoordinaten durch Ausdrücke von endlichen Differenzen angenähert werden. Betrachtet man gleichzeitig die Zeitkoordinate als eine stetige unabhängige Veränderliche, so ergeben sich für einen inneren Gitterpunkt die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} u_{i,j,k} + \frac{\alpha^2}{h^2} (6 u_{i,j,k} - u_{i-1,j,k} - u_{i+1,j,k} - u_{i,j-1,k} - u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k-1} - u_{i,j,k+1}) = 0 \quad (4)$$

und

$$u_{i,j,k}(0) = w_{i,j,k} \dots \dots \dots (5).$$

Ferner gilt für die Gitterpunkte, die auf der Oberfläche liegen, die Gleichung:

$$u_{\mu,\nu,\varrho} = g_{\mu,\nu,\varrho}(t) \dots \dots \dots (6).$$

Nehmen wir an, daß der Lösungsbereich ein Parallelepiped ist. Wird dieses Parallelepiped durch ein aus $m \times n \times r$ Punkten bestehendes quadratisches Gitter angenähert, so lassen sich die Gleichungen (4) und (6) in die folgende Matrixengleichung zusammenfassen:

$$\frac{d}{dt} u + \frac{\alpha^2}{h^2} \mathfrak{A} u = \frac{\alpha^2}{h^2} g \dots \dots \dots (7).$$

Dann ergibt sich die Anfangsbedingung in der Form

$$u(0) = w \dots \dots \dots (8).$$

Hierin bedeuten

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{E}^{(r)} \times \mathfrak{E}^{(n)} \times \mathfrak{E}^{(m)} + \mathfrak{E}^{(r)} \times \mathfrak{E}^{(n)} \times \mathfrak{E}^{(m)} + \mathfrak{E}^{(r)} \times \mathfrak{E}^{(n)} \times \mathfrak{E}^{(m)};$$

h = Schrittweite (Maschenweite);

u = Spaltenmatrix der zu den inneren Punkten gehörigen unbekannten Temperaturfunktionen $u_{i,j,k}(t)$;

g = Spaltenmatrix der gegebenen Oberflächentemperaturfunktionen $g_{\mu,r,e}(t)$;

w = Spaltenmatrix der zu den inneren Punkten gehörigen vorgeschriebenen Anfangstemperaturen $w_{i,j,k}$;

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r;$$

$$\mu = 0, m+1 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n; \quad \varrho = 1, 2, \dots, r;$$

$$\nu = 0, n+1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \varrho = 1, 2, \dots, r;$$

$$\varrho = 0, r+1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Die Lösung der Gleichung (7) kann in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$u = e^{-\frac{a^2}{h^2} \mathfrak{U} t} w + \frac{a^2}{h^2} \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{-\frac{a^2}{h^2} \mathfrak{U} (t-\tau)} g(\tau) d\tau \dots \dots \dots (9).$$

Es kann gezeigt werden, daß die Matrizenfunktion $e^{-\frac{a^2}{h^2} \mathfrak{U} t}$ sich in der Form

$$e^{-\frac{a^2}{h^2} \mathfrak{U} t} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m e^{-\frac{a^2}{h^2} \delta_{i,j,k} t} v_k^{(r)} v_k^{(r)*} \times v_j^{(n)} v_j^{(n)*} \times v_i^{(m)} v_i^{(m)*}$$

ausdrücken läßt, wobei

$$\delta_{i,j,k} = \lambda_i^{(m)} + \lambda_j^{(n)} + \lambda_k^{(r)}$$

ist. (Vgl. [1], S. 220—222). Somit läßt sich die Lösung in der Form einer endlichen FOURIER-Reihe erhalten.

Soll das Temperaturfeld in einem unregelmäßigen Bereich betrachtet werden, so empfiehlt es sich, den gegebenen Bereich durch ein Aggregat von Parallelepipeden anzunähern. Dann können die einzelnen Parallelepipede durch rechteckige Punktgitter ersetzt werden. Auf diese Weise ergibt sich für den Fall von Randbedingungen erster Art eine Matrizengleichung der Form

$$\frac{d}{dt} u + \frac{a^2}{h^2} \mathfrak{U} u + \frac{a^2}{h^2} \mathfrak{B} u = \frac{a^2}{h^2} g \dots \dots \dots (10).$$

Die Matrix \mathfrak{U} kann in der Form einer Diagonalübermatrix

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} \mathfrak{U}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{U}_p \end{bmatrix}$$

angeschrieben werden, wobei \mathfrak{U}_σ die zum σ -ten Parallelepiped gehörige Koeffizientenmatrix ist. Enthält das zum σ -ten Parallelepiped gehörige Punktgitter $m_\sigma \times n_\sigma \times r_\sigma$ Punkte, so wird

$$\mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{E}^{(r_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(n_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(m_\sigma)} + \mathfrak{E}^{(r_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(n_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(m_\sigma)} + \mathfrak{E}^{(r_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(n_\sigma)} \times \mathfrak{E}^{(m_\sigma)}.$$

Die Matrix \mathfrak{B} ist eine Übermatrix, deren Untermatrizen Einheitsmatrizen bzw. Nullmatrizen sind.

Nimmt man an, daß die Temperaturverteilung an der Oberfläche durch Randbedingungen zweiter bzw. dritter Art beherrscht ist, so gewinnt man wieder eine Matrizendifferentialgleichung der Form (10), aber in diesem Fall bedeuten \mathfrak{U} die zur Randbedingung erster Art gehörige Koeffizientenmatrix und \mathfrak{B} eine Diagonalmatrix.

In einem früher erschienen Aufsatz [2] des Vortragenden ist ein Iterationsverfahren entwickelt worden, welches auch zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (10) anwendbar ist.

Mit Hilfe dieser Methode können Wärmeleitungsprobleme auch in dem Fall behandelt werden, wenn die Wärmeleitfähigkeit eine beliebige Funktion der Ortskoordinaten bzw. der Temperatur ist [3].

Literatur

- [1] E. EGÉRVÁRY, On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Sc. Math., Szeged **XV** (1954), S. 211—222.
 [2] P. BAJCSAY und V. LOVASS-NAGY, Ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von Matrizen-differentialgleichungen, ZAMM **39** (1959), S. 8—13.
 [3] V. LOVASS-NAGY, Nichtlineare Probleme der Wärmeleitung. (Vortrag gehalten im Rahmen des Kolloquiums über Probleme der nichtlinearen Mechanik vom 24. bis 28. März 1958 in Oberwolfach.) Siehe den von H. SCHOLZ zusammengestellten „Bericht über die vom 24. bis 28. März 1958 in Oberwolfach abgehaltene Vortrags- und Diskussionstagung“, MTW-Mitteilungen **V** (1958), S. 163—164.

Anschrift: Dr. V. LOVASS-NAGY, Budapest, XI, Somlói Ut 56, Ungarn

Über die Anwendung der Matrizenrechnung zur Ermittlung von Stoßspannungsverteilungen in Spulenwicklungen^{*)}

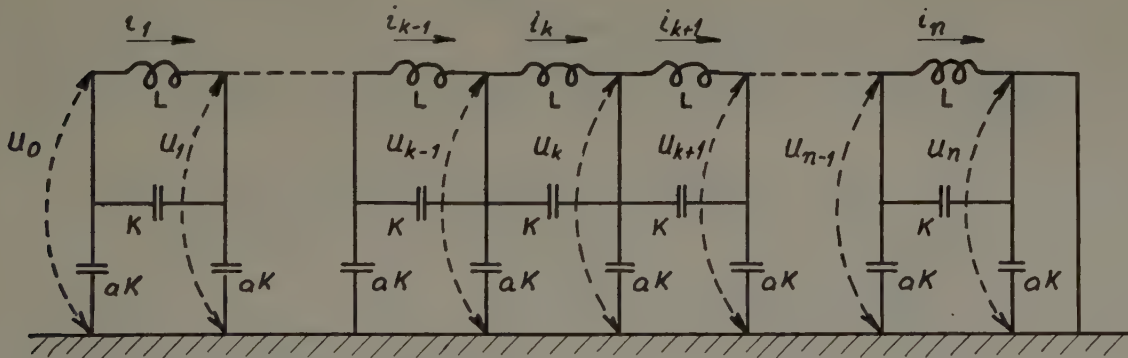
Von V. LOVASS-NAGY

Die Stoßerscheinungen in Transformatoren und elektrischen Maschinen sind schon von einer Reihe von Verfassern studiert worden. (Siehe [1] bzw. [2].) Die Aufgabe, Stoßspannungsverteilungen in Wicklungen zu berechnen, scheint aber auch heute noch teilweise ungelöst zu sein. In der vorliegenden Arbeit wird eine Matrizenmethode erläutert, mit deren Hilfe die transienten Stoßspannungen in Transformatorwicklungen berechnet werden können.

Die Methode wird für eine homogene Wicklung entwickelt. Es wird angenommen, daß an den Eingang dieser Wicklung ein Spannungsstoß geschaltet wird, während der Ausgang direkt an Erde liegt. Die zu betrachtende Wicklung wird in der Längsrichtung in n unter sich gleiche „Elementarspulen“ unterteilt. Wir folgen hier den durch P. WALDVOGEL und R. ROUXEL [3] eingeschlagenen Weg, jedoch sind die bei uns vorliegenden Verhältnisse allgemeiner als dort. Wird angenommen, daß die Widerstände der einzelnen Elementarspulen und die Reihenkapazitäten zwischen zwei nicht benachbarten Elementarspulen zu vernachlässigen sind, so kann die zu betrachtende Wicklung durch das im Bild veranschaulichte mathematische Modell ersetzt werden.

Es bedeuten

- K die Reihenkapazität zwischen zwei benachbarten Elementarspulen,
 aK die Parallelkapazität einer Elementarspule zur Erde,
 L die Selbstinduktivität einer Elementarspule.



Die Bezeichnungen für Ströme und Spannungen gehen aus dem Bild hervor. Wir benutzen weiterhin noch folgende Matrizenbezeichnungen:

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{bezeichnen Spaltenmatrizen der Ströme} \\ \text{bzw. Spannungen,} \end{array}$$

$$e_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{bezeichnet eine Spaltenmatrix (mit } k \text{ skalaren Elementen),} \\ \text{deren erstes Element Eins und alle andere Elemente Null sind,} \end{array}$$

^{*)} Der vorliegende Vortrag wurde für die GAMM-Tagung angemeldet, konnte aber nicht gehalten werden.

\mathfrak{E}_k bezeichnet eine Einheitsmatrix k -ter Ordnung,

$\langle d_1, d_2, \dots, d_k \rangle$ bezeichnet eine Diagonalmatrix k -ter Ordnung,

$$\mathfrak{C}_{n-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet die sog. „gleichmäßige Kontinuante“}$$

($n-1$)-ter Ordnung,

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \quad \text{bezeichnet den } k\text{-ten Eigenwert der Matrix } \mathfrak{C}_{n-1},$$

$$v_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet den } k\text{-ten Eigenvektor der Matrix } \mathfrak{C}_{n-1},$$

$$f(\mathfrak{C}_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\lambda_k) v_k v_k^* \quad \text{bezeichnet die kanonische Darstellung einer analytischen Funktion von } \mathfrak{C}_{n-1},$$

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} n-1 \text{ Reihen} \\ n \text{ Spalten} \end{matrix}$$

$$\mathfrak{Q} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & q & q^2 & \dots & q^{n-3} & q^{n-2} & q^{n-1} \\ q & 1 & q & \dots & q^{n-4} & q^{n-3} & q^{n-2} \\ q^2 & q & 1 & \dots & q^{n-5} & q^{n-4} & q^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q^{n-1} & q^{n-2} & q^{n-3} & \dots & q^2 & q & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} n \text{ Reihen} \\ n \text{ Spalten} \end{matrix}$$

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = [a_{ik} \mathfrak{B}]$ bezeichnet ein „direktes Produkt“ der rechteckigen Matrizen $\mathfrak{A} = [a_{ik}]$ und $\mathfrak{B} = [b_{ik}]$.

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_1 b \\ \vdots \\ a_n b \end{bmatrix} \quad \text{bezeichnet ein „direktes Produkt“ der Spaltenmatrizen}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})(\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{B}\mathfrak{D})$ bezeichnet das gewöhnliche Matrizenprodukt zweier direkten Produkte.

Unseren Untersuchungen liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

I.) $u_n \equiv 0$

II.) $\begin{cases} u_0 \equiv 0 & \text{für } t < 0 \\ u_0 \equiv U(t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

III.) Für $t = 0$ ist die Summe der elektrostatischen Ladungen in jedem Knotenpunkt des Ersatzschemas Null. Damit ergibt sich die Anfangsbedingung

$$K[-u_{k-1}(0) + 2u_k(0) - u_{k+1}(0)] + aK u_k(0) = 0; \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$[\mathfrak{C}_{n-1} - a \mathfrak{C}_{n-1}] u(0) = e_{n-1} U(0) \quad \dots \quad (0.1).$$

IV.) Für $t = 0$ sind alle Ströme Null:

$$i(0) = 0 \quad \dots \quad (0.2).$$

V.) Nach B. HELLER [4] wird angenommen, daß der Verlauf der Gegeninduktivitäten zweier Windungen einer homogenen Wicklung durch eine Exponentialfunktion $M_0 e^{-\lambda|\xi-x|}$ dargestellt werden kann. Hierin bedeuten x bzw. ξ die Ortskoordinaten der betreffenden Windungen, M_0 die Eigeninduktivität einer Windung und λ eine, von der Geometrie der Wicklung abhängige Konstante. Dann liegt auf der Hand die Voraussetzung, daß die Gegeninduktivität der i -ten Elementarspule mit der k -ten Elementarspule sich durch eine Funktion $q^{|i-k|} L$ bestimmen läßt, wobei die Konstante q aus den geometrischen Daten des Elementarspulen-systems zu berechnen ist.

Für $t > 0$ ergeben sich die Differentialgleichungen

$$i_k - i_{k+1} = K \frac{d}{dt} (-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1}) + aK \frac{d}{dt} u; \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1),$$

$$u_{k-1} - u_k = L \sum_{r=1}^n q^{|r-k|} \frac{d}{dt} i_r; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \dots \quad (2),$$

die sich in die Matrizengleichungen

$$\mathfrak{D} i = K (\mathfrak{C}_{n-1} + a \mathfrak{C}_{n-1}) \frac{d}{dt} u - K e_{n-1} \frac{d}{dt} U \quad \dots \quad (1.1),$$

$$-\mathfrak{D}^* u = L \mathfrak{D} \frac{d}{dt} i - e_n U \quad \dots \quad (2.1)$$

zusammenfassen lassen, woraus

$$\frac{d}{dt} \sqrt{K} u = \frac{1}{\sqrt{L} K} (\mathfrak{C}_{n-1} + a \mathfrak{C}_{n-1})^{-1} \mathfrak{D} \sqrt{L} i + (\mathfrak{C}_{n-1} + a \mathfrak{C}_{n-1})^{-1} e_{n-1} \sqrt{K} \frac{d}{dt} U \quad (1.2),$$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{D} \sqrt{L} i = -\frac{1}{\sqrt{L} K} \mathfrak{D} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{D}^* \sqrt{K} u + \frac{1}{\sqrt{L} K} \mathfrak{D} \mathfrak{D}^{-1} e_n \sqrt{K} U \quad \dots \quad (2.2).$$

Es kann gezeigt werden, daß man der Inversen von \mathfrak{D} die Gestalt

$$\mathfrak{D}^{-1} = \frac{1}{1-q^2} [q \mathfrak{D}^* \mathfrak{D} + (1-2q-q^2) \mathfrak{C}_n + (q+q^2) \mathfrak{S}_n]$$

geben kann. Dabei bedeutet

Diese Elemente sind Null

$$\mathfrak{S}_n = \langle 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ Elemente}}, 1 \rangle$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{D} \mathfrak{D}^* = \mathfrak{C}_{n-1}$ und $\mathfrak{D} \mathfrak{S}_n \mathfrak{D}^* = \mathfrak{S}_{n-1}$, so daß

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{D}^* = \frac{1}{1-q^2} [q \mathfrak{C}_{n-1}^2 + (1-2q-q^2) \mathfrak{C}_{n-1} + (q+q^2) \mathfrak{S}_{n-1}]$$

wird. Auf Grund einer einfachen, hier nicht wiedergegebenen Überlegung kann das Glied $\frac{q+q^2}{1-q^2} \mathfrak{S}_{n-1}$ vernachlässigt werden. (Siehe [5], S. 433.)

Führt man die Bezeichnungen

$$u_t = \sqrt{K} u; \quad i_t = \mathfrak{D} \sqrt{K} i; \quad \mathfrak{h}_1 = (\mathfrak{C}_{n-1} + a \mathfrak{C}_{n-1})^{-1} e_{n-1} \sqrt{K}; \quad \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{D} \mathfrak{D}^{-1} e_n \sqrt{K};$$

$$\varphi_k = \frac{1}{a + \lambda_k}; \quad \gamma_k = \frac{1}{1-q^2} [(1-2q-q^2) \lambda_k + q \lambda_k^2]$$

ein, so ergibt sich aus (1.2) und (2.2) die Übermatrizengleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_t \\ i_t \end{bmatrix} = \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{L} K} \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix} \times v_k v_k^* \right\} \begin{bmatrix} u_t \\ i_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{h}_1 U(t) \\ \mathfrak{h}_2 \frac{d}{dt} U(t) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3).$$

Multipliziert man (3) mit $\mathfrak{E}_2 \times \cdot v_k$ von links, so zerfällt die Gleichung (3) in $n - 1$ unabhängige Matrixengleichungen von der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_k^* u_t \\ v_k^* i_t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{L K}} \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_k^* u_t \\ v_k^* i_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k^* \eta_1 U(t) \\ v_k^* \eta_2 \frac{d}{dt} U(t) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}_k = \frac{1}{\sqrt{L K}} \begin{bmatrix} 0 & \varphi_k \\ -\gamma_k & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{y}_k = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k^* u_t \\ v_k^* i_t \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{g}_k = \begin{bmatrix} g_{1k}(t) \\ g_{2k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k^* \eta_1 U(t) \\ v_k^* \eta_2 \frac{d}{dt} U(t) \end{bmatrix},$$

so ergibt sich die Lösung von (4) in der Form

$$\mathfrak{y}_k = e^{\mathfrak{A}_k t} \mathfrak{y}_k(0) + \int_{\tau=0}^{\tau=t} e^{\mathfrak{A}_k(t-\tau)} \mathfrak{g}_k(\tau) d\tau \dots \dots \dots (5),$$

wobei nach (0.1) bzw. (0.2)

$$\mathfrak{y}_k(0) = \begin{bmatrix} v_k^* \sqrt{K} u(0) \\ v_k^* \mathfrak{D} \sqrt{L} i(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{K} \varphi_k v_{1k} U(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist.

Wie bekannt (siehe [6], S. 176), genügt eine beliebige quadratische Matrix ihrer eigenen charakteristischen Gleichung. Es ist also

$$\mathfrak{A}_k^2 = -\frac{1}{L K} \varphi_k \gamma_k \mathfrak{E} \dots \dots \dots (6).$$

Mit Hilfe von (6) ergibt sich aus der unendlichen Reihe

$$e^{\mathfrak{A}_k t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{A}_k^{\nu} t^{\nu}$$

der Ausdruck

$$e^{\mathfrak{A}_k t} = \mathfrak{E}_2 \cos \sqrt{\frac{\varphi_k \gamma_k}{L K}} t + \sqrt{\frac{L K}{\varphi_k \gamma_k}} \mathfrak{A}_k \sin \sqrt{\frac{\varphi_k \gamma_k}{L K}} t \dots \dots \dots (7).$$

Man erhält somit für \mathfrak{y}_k einen Ausdruck, der nur Funktionen von skalaren Veränderlichen enthält. Dann können die gesuchten Spannungen in der Form von endlichen FOURIER-Reihen gewonnen werden:

$$u_v = \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{k=1}^{n-1} y_{1k} v_{rk}.$$

Zu bemerken ist noch, daß das Verfahren sich ohne weiteres auch auf Maschinenwicklungen anwenden läßt.

Literatur

- [1] P. A. ABETTI, Bibliography on the Surge Performance of Transformers and Rotating Machines, AIEE Transactions **77** (1958), pt. III., S. 1150—1168.
- [2] P. A. ABETTI, Survey and Classification of Published Data on the Surge Performance of Transformers and Rotating Machines, AIEE Transactions **77** (1958), pt. III., S. 1403—1413.
- [3] P. WALDVOGEL — M. ROUXEL, Predetermination by Calculation of the Electric Stresses in a Winding Subjected to a Surge Voltage, CIGRE rep. **125** (1956).
- [4] B. HELLER — J. HLAVKA — A. VEVERKA, Die Eigenfrequenzen der einlagigen Zylinderspule bei Spannungsschößen, Bull. schweiz. elektrotechn. Ver. **40** (1949), S. 951—957.
- [5] V. LOVASS-NAGY — K. SZENDY, Surge Phenomena in Electromagnetic Coils Analysed by Hypermatrix Method, Acta Technica Acad. Sc. Hung. **XXI** (1958), S. 427—446.
- [6] R. ZURMÜHL, Matrizen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958, Springer-Verlag.

Anschrift: Dr. V. LOVASS-NAGY, Budapest, XI, Somlói Ut 56, Ungarn

Über die Verwendung von Transformationsgruppen zur Gewinnung von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentialgleichungssysteme (mit Anwendungen auf die Gleichungen der Strömungsphysik)

Von E.-A. MÜLLER und K. MATSCHAT

Die partiellen Differentialgleichungssysteme, welche bei der Behandlung strömungsphysikalischer Probleme auftreten, lassen sich oft durch sogenannte Ähnlichkeitsansätze auf Gleichungssysteme zurückführen, die eine unabhängige Variable weniger enthalten als das ursprüngliche System und daher leichter zu integrieren sind. Solche Ansätze sind meistens durch physikalische Überlegungen (z. B. Dimensions- oder Symmetriebetrachtungen) gewonnen worden. Hier soll über ein Verfahren berichtet werden, das unter Zuhilfenahme von Transformationsgruppen, die das betrachtete partielle Differentialgleichungssystem invariant lassen, systematisch Ähnlichkeitsansätze liefert. Das Verfahren stellt eine Weiterentwicklung einer von K. U. v. HAGENOW [1] angegebenen Methode dar.

Der Grundgedanke des Verfahrens, welcher auf S. LIE [2] zurückgeht, sei an einem einfachen Beispiel kurz erläutert: Wir betrachten die EULERSchen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung für eine ebene stationäre Strömung konstanter Dichte:

$$u u_x + v u_y + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad u v_x + v v_y + \frac{1}{\rho} p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0 \quad \dots (1).$$

Dabei bedeuten x und y cartesische Ortskoordinaten, u und v die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, p den Druck, ρ die Dichte. Partielle Ableitungen sind durch angehängte Indizes gekennzeichnet. Das Gleichungssystem (1) ist u. a. gegen die Drehgruppe

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \tau + y \sin \tau, & u' &= u \cos \tau + v \sin \tau, & p' &= p \\ y' &= -x \sin \tau + y \cos \tau, & v' &= -u \sin \tau + v \cos \tau, \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

invariant, d. h. jede Lösung von (1) geht durch die Transformation (2) (bei festem τ) wieder in eine Lösung von (1) über. Wie man diese Invarianzeigenschaft ausnutzen kann, um zu einem Ähnlichkeitsansatz zu gelangen, sieht man besonders einfach, wenn man zu den folgenden neuen Variablen übergeht:

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg(y/x), & \psi &= \arctg(v/u) - \arctg(y/x), & p &= p \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & w &= \sqrt{u^2 + v^2}, \end{aligned}$$

In diesen Variablen nimmt die Drehgruppe die Form einer Translationsgruppe an (Translation in φ -Richtung), denn r, ψ, w, p werden durch (2) nicht verändert, nur φ ändert sich um den Drehwinkel τ . Dann ist aber der Ähnlichkeitsansatz

$$\psi = \psi(r), \quad w = w(r), \quad p = p(r) \quad \dots (3)$$

möglich. Denn setzt man diesen Ansatz — zunächst für einen festen Wert von φ — in (1) ein und löst das entstehende gewöhnliche Differentialgleichungssystem, dann ist die so gewonnene Lösung auch Lösung des ursprünglichen partiellen Differentialgleichungssystems (1), denn wegen der Invarianz von (1) gegen Translation in φ erfüllt sie (1) nicht nur für den gewählten festen Wert von φ , sondern für alle Werte. — Die aus dem Ansatz entspringende Lösung beschreibt übrigen Strömungen mit spiralförmigen Stromlinien.

Das allgemeine Verfahren baut im wesentlichen auf dem eben skizzierten Gedankengang auf. Es besteht aus zwei Schritten:

1) Bestimmung aller (eiparametrigen) Transformationsgruppen, die ein vorgelegtes partielles Differentialgleichungssystem in n abhängigen Variablen w_i und m unabhängigen Variablen x_i invariant lassen. Diese Aufgabe führt auf ein lineares partielles Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der $n + m$ Funktionen $\alpha_i(x_\mu, w_\nu), \beta_i(x_\mu, w_\nu)$, welche die gesuchten „infinitesimalen Transformationen“

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \alpha_i(x_\mu, w_\nu), \quad \frac{dw_i}{d\tau} = \beta_i(x_\mu, w_\nu) \quad \dots (4)$$

definieren. (Aus der infinitesimalen Transformation geht die Gruppe durch Integration hervor.)

2) Zu jeder Gruppe Bestimmung der „Ähnlichkeitsvariablen“, d. h. derjenigen $n + m - 1$ voneinander unabhängigen Funktionen von x_i und w_i , die auf den „Bahnkurven“ der Gruppe (d. h. den Integralkurven des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (4)) konstant sind. In den so bestimmten Variablen ist dann ein Ähnlichkeitsansatz möglich.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung der infinitesimalen Transformationen ist im allgemeinen gering. Das liegt einmal daran, daß das oben genannte partielle Differentialgleichungssystem für α_i und β_i meistens stark überbestimmt ist. Ferner ist dieses System immer linear, auch wenn das vorgelegte, auf Ähnlichkeitslösungen zu untersuchende System nichtlinear ist. Gerade für nichtlineare Probleme bringt daher das Verfahren wesentliche Erleichterungen mit sich.

Das Verfahren wurde von den Verfassern, um es zu testen, zunächst auf solche Gleichungssysteme angewandt, deren Lösungen schon gut durchforscht sind, z. B. auf die Grenzschichtgleichungen für die von einer inkompressiblen Flüssigkeit längsangeströmte ebene Platte. Das Verfahren liefert hier sofort genau alle Ähnlichkeitslösungen, die bisher bekannt sind, und von denen W. MÄGLER [3] gezeigt hat, daß es die einzig möglichen sind. Für die Gleichungen ebener stationärer Gasströmungen erhält man u. a. leicht die von W. TOLLMIEH 1937 [4] aufgefundene Ähnlichkeitslösung, bei der Geschwindigkeitsbetrag und Winkel zwischen Geschwindigkeits- und Ortsvektor längs logarithmischer Spiralen konstant sind, ferner die TSCHAPLIGIN-RINGLEBSCHEN Schaufelströmungen [5] und die „einfachen Wellen“.

Zwei Anwendungen auf neuere Probleme seien zum Schluß noch kurz angegeben. Die erste Anwendung betrifft ein nichtlineares Problem, nämlich die Gleichungen für eindimensionale, instationäre Gasströmungen konstanter Entropie:

$$u_t + u u_x + \frac{2}{\kappa - 1} a a_x = 0, \quad a_t + \frac{\kappa - 1}{2} a u_x + u a_x = 0$$

(x Ortskoordinate, t Zeit, u Geschwindigkeit, a lokale Schallgeschwindigkeit, κ Verhältnis der spezifischen Wärmen). Das Verfahren liefert eine große Zahl von Ähnlichkeitslösungen, aus denen hier nur eine als Beispiel herausgegriffen sei:

$$\left. \begin{aligned} a t &= -\frac{i^{-(\nu+1)}}{c_0(\kappa-1)} \operatorname{Sin}(\sqrt{\kappa-1} \lambda u) \cdot a^{-\nu} J_{\nu+1}\left(\frac{2 i \lambda}{\sqrt{\kappa-1}} a\right), \\ x - u t &= -\frac{i^{-\nu}}{c_0(\kappa-1)} \operatorname{Cos}(\sqrt{\kappa-1} \lambda u) \cdot a^{-\nu} J_{\nu}\left(\frac{2 i \lambda}{\sqrt{\kappa-1}} a\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5).$$

λ und c_0 sind beliebige Konstanten. J_{ν} bedeutet die BESSEL-Funktion ν -ter Ordnung. Der Index ν hängt mit κ durch die Formel $\nu = (2 - \kappa)/(\kappa - 1)$ zusammen. Für $\kappa > 1$ lassen sich die Gleichungen (5) eindeutig nach $u(x, t)$ und $a(x, t)$ auflösen. Man hat hier eine Lösung vor sich, die in ihrem gesamten Existenzgebiet in der x, t -Ebene singularitätenfrei ist und die sich eindeutig vom Geschwindigkeitsplan in den Ortsplan umrechnen läßt.

Die zweite Anwendung betrifft ein lineares Problem, nämlich die Wärmeleitung in einer Scherströmung, die mit der Geschwindigkeit $b y$ in x -Richtung verläuft. Die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung für diesen Fall lautet

$$u_t - a(u_{xx} + u_{yy}) + b y u_x = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

(a und b Konstanten). Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems. Die allgemeinste infinitesimale Transformation, welche (6) invariant läßt, lautet

$$\frac{dx}{d\tau} = c_3 + (c_0 + b c_1) t + \frac{b c_2}{2} t^2 - \frac{b^2 c_0}{6} t^3,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = c_1 + c_2 t - \frac{b c_0}{2} t^2,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = c_4,$$

$$\frac{du}{d\tau} = f(x, y, t) + \frac{u}{2a} [-c_0 x + (b c_0 t - c_2) y + c_5].$$

$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ sind beliebige Konstanten, f muß der Gl. (6) genügen. Setzt man f und alle Konstanten außer c_2 gleich Null, so wird man auf den Ähnlichkeitsansatz

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{y^2}{4 a t}} \bar{u}\left(x - \frac{b}{2} y t, t + \frac{b^2}{12} t^3\right) \quad \dots \dots \dots (7)$$

geführt. Durch Einsetzen in (6) erhält man für \bar{u} die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (ohne Konvektivglied)

$$\bar{u}_\eta - a \bar{u}_{\xi\xi} = 0,$$

wobei ξ die erste, η die zweite Variable im Argument von u bedeutet. Jede Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung führt also über den Ansatz (7) zu einer Lösung der Ausgangsgleichung (6). Wählt man speziell die Quelllösung

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4a\eta}},$$

so erhält man die Quelllösung für unser Problem mit einer Quelle im Nullpunkt des x, y -Koordinatensystems. Durch Übergang zu einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt im Abstand y_0 von der x -Achse mit der Strömung mitbewegt wird — dieser Übergang wird durch die Transformation

$$x' = x - x_0 - b y_0 t, \quad y' = y - y_0$$

vermittelt —, erhält man die Lösung für eine Quelle an einer beliebigen Stelle x_0, y_0 :

$$u = \frac{1}{t \sqrt{1 + \frac{b^2}{12} t^2}} e^{-\frac{\left[x - x_0 - \frac{b}{2}(y + y_0)t\right]^2}{4at \left(1 + \frac{b^2}{12} t^2\right)} - \frac{(y - y_0)^2}{4at}}.$$

Mit Hilfe dieser Lösung läßt sich in bekannter Weise durch Multiplikation mit einer von x_0, y_0 abhängigen Anfangsverteilung und Integration über x_0, y_0 das Anfangswertproblem lösen.

Eine genauere Darstellung des Verfahrens mit ausführlichem Literaturverzeichnis erscheint demnächst in [6].

Literatur

- [1] K. U. v. HAGENOW, Über invariante Lösungen partieller Differentialgleichungssysteme, speziell der Gleichungen der ebenen Gasdynamik und Hydromagnetik, Dissertation Göttingen 1956.
- [2] S. LIE, Gesammelte Abhandlungen, Bd. IV, S. 358ff.
- [3] W. MÄGLER, Die „ähnlichen“ Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen, ZAMM 23 (1943), S. 241—251.
- [4] W. TOLLMIE, Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen, ZAMM 17 (1937), S. 117—136.
- [5] F. RINGLEB, Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung, ZAMM 20 (1940), S. 185—198.
- [6] E.-A. MÜLLER und K. MATSCHAT, Über das Auffinden von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentialgleichungssysteme unter Benutzung von Transformationsgruppen, mit Anwendungen auf Probleme der Strömungsphysik, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. W. Tollmien (im Druck).

Anschriften: Privatdozent Dr. E.-A. MÜLLER und Dr. K. MATSCHAT, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Böttingerstr. 6—8

Fehlerabschätzungs- und Eindeutigkeitssätze für Integro-Differentialgleichungen

VON KARL NICKEL*)

Für nichtlineare Integro-Differentialgleichungen werden Fehlerabschätzungen und Eindeutigkeitssätze angegeben. Eine ausführliche Arbeit darüber erscheint demnächst im „Archive for Rational Mechanics and Analysis“.

Anschrift: Doz. Dr. K. NICKEL, Karlsruhe-Rintheim, Brettener Str. 9

*) Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe

Die Fundamentalinvarianten einer Weltlinie in der Minkowskischen Mechanik

Von F. NOŽIČKA

Der lokale Charakter einer Weltlinie in der MINKOWSKISCHEN Mechanik wird durch ein bestimmtes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben, die die Invarianz gegenüber sämtlichen LORENTZ-Transformationen ausweisen und welche als Analogie der bekannten FRENETSCHEN Formeln einer Kurve in vierdimensionalen RIEMANNschen Raum betrachtet werden können.

Im gegebenen LORENTZschen Raumzeitsystem (x, y, z, t) wird durch die Gleichungen

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in \langle t_0, t_1 \rangle$$

die Bewegung eines Massenpunktes der „Ruhmasse“ μ beschrieben. Die entsprechende Weltlinie in vierdimensionalem MINKOWSKISCHEN Raum wird parametrisch durch die Gleichungen

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad t = t(\tau)$$

oder kürzer

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad \dots \dots \dots (1)$$

dargestellt, wo der Parameter

$$\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad v^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad (\text{Lichtgeschwindigkeit})$$

die sogenannte „Eigenzeit“, des bewegten Massenpunktes bedeutet. Die indefinite Metrik des MINKOWSKISCHEN Raumes ist vollkommen durch den Tensor $G_{\alpha\beta}$ beschrieben, wo

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = 1, \quad G_{44} = -c^2, \quad G_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für } \alpha \neq \beta.$$

Unter der Voraussetzung genügender Glattheit der Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ im betrachteten Zeitintervall gelten dann die folgenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} i_1^\alpha &= \frac{P}{\mu} i_2^\alpha, \\ \frac{d}{d\tau} i_2^\alpha &= \frac{P}{\mu c^2} i_1^\alpha + \frac{Q}{\mu c^2} i_3^\alpha, \\ \frac{d}{d\tau} i_3^\alpha &= -\frac{Q}{\mu c} i_2^\alpha + \frac{R}{\mu c} i_4^\alpha, \\ \frac{d}{d\tau} i_4^\alpha &= -\frac{R}{\mu c} i_3^\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2),$$

wo $i_1^\alpha, i_2^\alpha, i_3^\alpha, i_4^\alpha$ Vektoren in Punkten der Weltlinie (1) sind, welche die Bedingungen

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} i_1^\alpha i_1^\beta &= -c^2, \quad G_{\alpha\beta} i_2^\alpha i_2^\beta = G_{\alpha\beta} i_3^\alpha i_3^\beta = G_{\alpha\beta} i_4^\alpha i_4^\beta = 1, \\ G_{\alpha\beta} i_s^\alpha i_k^\beta &= 0 \quad \text{für } s \neq k \quad (s, k \in 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

erfüllen. Dabei ist $i_1^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$, und der Vektor i_2^α hat die Richtung des Vektors $X^\alpha = \mu \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2}$ d. h. des Vektors der MINKOWSKISCHEN Kraft. Die Größen P, Q, R in den Gleichungen (2) stellen in Punkten der Weltlinie definierte Skalare dar, wobei

$$\begin{aligned} P &= \mu \left(G_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ Q &= \frac{\mu^3 c}{P^2} \left(\begin{vmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x}^3 & \dot{x}^1 & \dot{x}^4 \\ \ddot{x}^3 & \ddot{x}^1 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^3 & \ddot{x}^1 & \ddot{x}^4 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} \dot{x}^2 & \dot{x}^3 & \dot{x}^4 \\ \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \end{vmatrix} - \frac{1}{c^2} \begin{vmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \dot{x}^3 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 \end{vmatrix} \right) \quad \text{für } P \neq 0, \end{aligned}$$

$$Q = 0 \quad \text{für} \quad P = 0;$$

$$R = \frac{\mu^6 c^3 \vartheta}{Q^2 P^3} \begin{vmatrix} \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \\ \ddot{x}^1 & \ddot{x}^2 & \ddot{x}^3 & \ddot{x}^4 \end{vmatrix} \quad \text{für } Q \neq 0, \quad R = 0 \quad \text{für } Q = 0$$

($\vartheta \dots$ Sigmum der Determinante rechts,

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\tau}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} \quad \text{usw.})$$

Die Skalare P, Q, R sind invariant gegenüber sämtlichen LORENTZ-Transformationen und werden durch dieselben Maßeinheiten wie die Kraft ausgedrückt.

Auf Grund der „FRENETSchen Formeln“ (2) werden dann folgende Resultate bewiesen:

- Wenn $P = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in welchem der Massenpunkt im Zustand der Ruhe ist.
- Wenn $Q = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie und Q nicht identisch gleich Null ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in welchem sich der Massenpunkt geradlinig, aber nicht gleichförmig bewegt.
- Wenn $R = 0$ entlang der gegebenen Weltlinie und Q nicht identisch gleich Null ist, dann existiert ein derartiges Inertialsystem, in welchem sich der Massenpunkt in einer ebenen — von einer Gerade verschiedenen — Kurve bewegt.

Diese Ergebnisse lassen sich schärfer als notwendige und hinreichende Bedingungen für die betreffende Art der Bewegung formulieren. Sie stellen dann eine bestimmte Grund-Klassifikation der Weltlinien in der MINKOWSKISchen Mechanik dar.

Anschrift: Dr. FRANZ NOŽIČKA, Prag 2 — Nové Město, Ke Karlovu 3, ČSSR.

Einige Bemerkungen zum exponentiellen Ausgleich

Von S. OBERLÄNDER *)

Es geht hier um folgendes Problem: Zu N vorgegebenen Wertepaaren y_i, t_i sollen drei Parameter A, B, C so bestimmt werden, daß

$$S = \sum_{i=1}^N (A + B e^{-C t_i} - y_i)^2$$

minimal wird. (Das Minuszeichen vor dem C ist nicht von Bedeutung, da sowohl positive als auch negative C -Werte zugelassen sind.)

Jedes Wertetripel A, B, C , welches S zum Minimum macht, wird Minimallösung genannt. Hier interessieren vorwiegend Minimallösungen mit $B \neq 0$ und $C \neq 0$. Sie sollen echte Minimallösungen heißen. Zur Bestimmung echter Minimallösungen benutzt man im allgemeinen eine der folgenden Methoden.

1. Iterative Methode

Man schätzt drei Werte A_0, B_0, C_0 , entwickelt die Funktion $f_i(A, B, C) = A + B e^{-C t_i}$ um A_0, B_0, C_0 in eine TAYLOR-Reihe, bricht nach den Gliedern 1. Ordnung ab und erhält einen linearen Ausdruck für die Korrekturgrößen a_0, b_0, c_0 , für die eine Ausgleichsrechnung in üblicher Weise angesetzt werden kann. Die Werte $A_1 = A_0 + a_0, B_1 = B_0 + b_0, C_1 = C_0 + c_0$ können als neue Schätzwerte dienen usw.

Wenn das Verfahren gegen ein Wertetripel mit $B \neq 0$ konvergiert, so ist dies Lösung des Gleichungssystems

$$\left. \begin{aligned} A N + B \sum x_i &= \sum y_i, \\ A \sum x_i + B \sum x^2 &= \sum x_i y_i, \\ A \sum x_i t_i + B \sum x_i^2 t_i &= \sum x_i y_i t_i \quad (x_i = e^{-C t_i}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Dieses Gleichungssystem folgt auch unmittelbar aus den notwendigen Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial B} = \frac{\partial S}{\partial C} = 0$ und $B \neq 0$.

*) Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DAW, Berlin.

2. λ -Methode

Zu dieser Methode gelangt man, wenn man versucht, die echten Lösungen von (1), d. h. Lösungen mit $B \neq 0$ und $C \neq 0$, auf direktem Wege zu finden.

Wird allgemein $x_i = e^{-\gamma t_i}$ gesetzt, so besitzt das aus den ersten zwei Gleichungen von (1) gebildete System für jedes $\gamma \neq 0$ genau eine Lösung $A(\gamma)$, $B(\gamma)$, falls man nur voraussetzt, daß

$$N > 3 \quad \text{und} \quad i \neq j \rightarrow t_i \neq t_j.$$

Diese Lösung kann in die dritte Gleichung von (1) eingesetzt werden und es ist dann nur nachzusehen, ob

$$\sum x_i y_i t_i - A(\gamma) \sum x_i t_i - B(\gamma) \sum x_i^2 t_i = \lambda^*(\gamma)$$

ebenfalls Null ist. Es läßt sich zeigen, daß $\lambda^*(\gamma)$ für $\gamma \neq 0$ in Vorzeichen und Nullstellen übereinstimmt mit

$$\lambda(\gamma) = \begin{vmatrix} N & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i t_i & \sum x_i^2 t_i & \sum x_i y_i t_i \end{vmatrix}.$$

$A = A(\gamma)$, $B = B(\gamma)$, $C = \gamma$ ist genau dann echte Lösung von (1), wenn $\gamma \neq 0$, $B(\gamma) \neq 0$ und $\lambda(\gamma) = 0$.

Im allgemeinen erwartet man von der Funktion $\lambda(\gamma)$ etwa den in Bild 1 gezeichneten Verlauf. Von der nichttrivialen Nullstelle ($\gamma \neq 0$) erwartet man, daß die ihr entsprechende Lösung von (1) eine echte Minimallösung ist.

Ohne pathologische Punktverteilungen annehmen zu müssen, wurden jedoch auch die in den Bildern 2 bis 5 schematisch wiedergegebenen $\lambda(\gamma)$ -Verläufe gefunden. Diese Beispiele zeigen,

1. daß es in gewissen Fällen keine nichttriviale Nullstelle von $\lambda(\gamma)$ und also auch keine echte Minimallösung gibt (siehe Bild 2);

2. daß es in gewissen Fällen zwar eine eindeutige nichttriviale Nullstelle von $\lambda(\gamma)$ und also — da sich bei $\lambda(\gamma) = 0$ in dem Bild 3 zugrundeliegenden Beispiel $B(\gamma) \neq 0$ ergab — genau eine echte Lösung von (1) gibt, daß diese aber, wie sich zeigte, keine Minimallösung darstellt (siehe Bild 3);

3. daß $\lambda(\gamma)$ mehrere nichttriviale Nullstellen und also — da sich bei $\lambda(\gamma) = 0$ in den Beispielen, die den Bildern 4 und 5 zugrunde liegen, stets $B(\gamma) \neq 0$ ergab — System (1) mehrere echte Lösungen haben kann, von denen sich jedoch jeweils nur eine als Minimallösung erwies.

Man muß also immer damit rechnen, daß $\lambda(\gamma)$ keine nichttriviale Nullstelle besitzt, oder, was die notwendige Folge ist, daß die iterative Methode nicht konvergiert (falls nicht zufällig eine endliche unechte Lösung möglich ist, gegen die das Verfahren konvergieren kann). Man muß ferner berücksichtigen, daß eine — sei es mit der λ -Methode oder mit der iterativen Methode — gefundene echte Lösung von (1) nicht Minimallösung zu sein braucht, auch dann nicht, wenn nur eine gefunden wird.

Ob es vielleicht mehrere Minimallösungen geben kann, ist noch nicht untersucht worden. Auch nicht die Frage, ob S für gewisse Parameter kleiner werden kann als das relative Minimum von S . Es hat ganz den Anschein, als ob letzteres möglich sein könnte, denn trägt man zu Bild 4 die Funktion $S(\gamma)$ auf, so erhält man Bild 6. Es wäre denkbar, daß dann auch Bild 7 realisierbar ist.

Abschließend seien einige Kriterien angegeben, mit denen zu vorgegebenen Wertepaaren t_i, y_i festgestellt werden kann, ob einer der in den Bildern 2 bis 5 dargestellten Entartungsfälle zu erwarten ist. Hierfür genügt es nämlich, das Verhalten von $\lambda(\gamma)$ im Nullpunkt und im Unendlichen zu kennen.

Im Nullpunkt gilt

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = \lambda''(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lambda'''(0) = -3 \begin{vmatrix} N & \sum t_i & \sum y_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i y_i \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^2 y_i \end{vmatrix}.$$

Im positiv Unendlichen gilt bei $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \lambda(\gamma) = 0$, und es gibt ein γ^* , so daß für alle $\gamma > \gamma^*$

$$\text{sign } \lambda = \text{sign} \left(y_2 - \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N-1} \right).$$

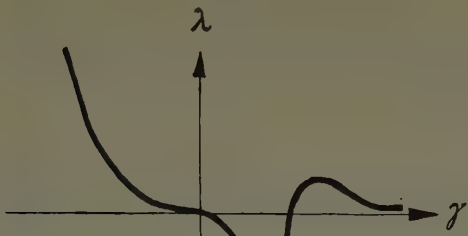


Bild 1



Bild 2

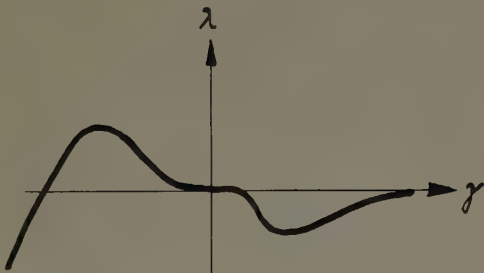


Bild 3

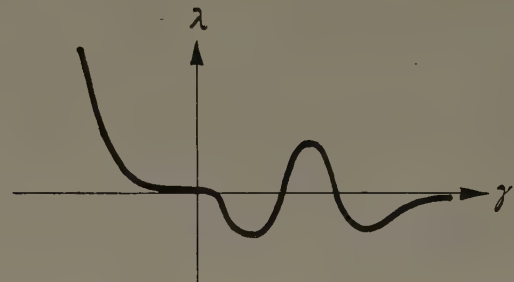


Bild 4

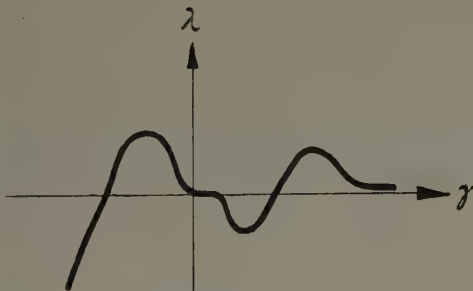


Bild 5

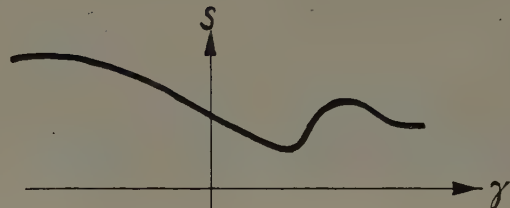


Bild 6

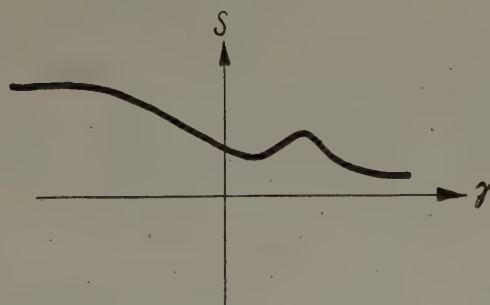


Bild 7

Im negativ Unendlichen gilt bei $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$ $\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} \lambda(\gamma) = \pm \infty$, und es gibt ein γ^{**} , so daß für alle $\gamma < \gamma^{**}$

$$\text{sign } \lambda = \text{sign} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N-1} y_i}{N-1} - y_{N-1} \right).$$

Da exponentielle Ausgleichsprobleme auf vielen Gebieten auftreten, werden die hier angedeuteten Untersuchungen demnächst in ausführlicherer Form zur Publikation in der ZAMM eingereicht werden.

Anschrift: Dr. S. OBERLÄNDER, Berlin N 58, Wolliner Str. 4

Zum Vergleich von Iterationsverfahren zur Gleichungsauflösung

VON GÜNTER OPITZ

Zur Nullstellenbestimmung werden zwei Klassen von Verfahren betrachtet, die in engem Zusammenhang miteinander stehen. Der Vergleich des Rechenaufwandes, der in beiden Fällen für das Erreichen einer vorgeschriebenen Genauigkeitssteigerung nötig ist, gibt die Möglichkeit zur Einschätzung der verschiedenen Verfahren.

Es sei die Nullstelle ξ der eindeutigen, hinreichend oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ gesucht,

$$f(\xi) = 0 \quad \dots \quad (1).$$

Als erste Klasse von Lösungsverfahren werden Rekursionsvorschriften der Form

$$x_{n+1} = \Phi(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-r}; f(x_n), f(x_{n-1}), \dots, f(x_{n-r})) \quad \dots \quad (2)$$

betrachtet ($0 < r < n$)¹⁾. Bei einem Verfahren der Form (2), kurz Verfahren (Φ) genannt, werden also keine Ableitungen von $f(x)$ benötigt. Für Φ soll gelten

$$u_j = \Phi(u_0, \dots, u_r; v_0, \dots, v_{j-1}, 0, v_{j+1}, \dots, v_r) \quad (0 \leq j \leq r) \quad \dots \quad (3).$$

Diese Forderung hat zur Folge, daß in (2) $x_{n+1} = \xi$ ist, sobald nur eines der x_q auf der rechten Seite gleich ξ gesetzt wird (verallgemeinerte Fixpunkteigenschaft).

Als Beispiele für Verfahren (Φ) mit $r = 2$ seien angeführt²⁾:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n}{[x_n, x_{n-1}]} - \frac{f_n f_{n-1} [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]}{[x_n, x_{n-1}] [x_n, x_{n-2}] [x_{n-1}, x_{n-2}]} \quad \dots \quad (4a),$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n [x_{n-1}, x_{n-2}]}{[x_n, x_{n-1}] [x_{n-1}, x_{n-2}] - f_{n-2} [x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]} \quad \dots \quad (4b).$$

Sind alle Differenzen $x_q - \xi$ hinreichend klein ($n \geq q \geq n - r$), so kann man die rechte Seite von (2) mit ausreichender Genauigkeit durch das erste Glied der TAYLOREntwicklung um $x_q = \xi$ ersetzen. Wegen der verallgemeinerten Fixpunkteigenschaft erhält man im allgemeinen

$$x_{n+1} - \xi = C (x_n - \xi) (x_{n-1} - \xi) \dots (x_{n-r} - \xi) \quad \dots \quad (5),$$

wobei C nicht verschwindet und nur von f und Φ und nicht von den x_q abhängt. Für die Größen

$$z_q = |C|^{1/r} |x_q - \xi| \quad \dots \quad (6)$$

läßt sich in bekannter Weise aus (5) die für große n gültige asymptotische Beziehung

$$z_{n+1} = z_n^\alpha \quad (1 < \alpha < 2) \quad \dots \quad (7)$$

herleiten, die das Konvergenzverhalten des Verfahrens (Φ) in einfachster Weise beschreibt; α wird als Konvergenzexponent bezeichnet.

Die zweite Klasse von Lösungsverfahren erhält man als Entartungsfälle der Verfahren (Φ) , indem man in der Funktion Φ aus (2) einen speziellen Grenzübergang durchführt. Dazu werden die $r + 1$ Werte x_q in k Gruppen zu je m eingeteilt³⁾:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}; x_{n-m}, \dots, x_{n-2m+1}; \dots; x_{n-r+m-1}, \dots, x_{n-r} \end{array} \right\} \quad \dots \quad (8),$$

$$r + 1 = k \cdot m, \quad m > 1$$

und alle Werte einer Gruppe läßt man gegen denjenigen streben, der in der Gruppe den kleinsten Index trägt:

$$G \left\{ \begin{array}{l} x_{n-jm-p} \rightarrow x_{n-m+1-jm} = y_{n-j} \\ j = 0, 1, \dots, k-1; p = 0, 1, \dots, m-2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad (9).$$

¹⁾ Der allgemeinere Fall, daß Φ noch von n abhängt, insbesondere die Zahl der Argumente von Φ , läßt sich gleichfalls nach der hier erörterten Methode behandeln.

²⁾ Es ist $f_q = f(x_q)$, und $[\dots]$ bedeutet die für $f(x)$ mit den angeführten Argumenten gebildete Steigerung (dividierte Differenz). (4b) kann man aus der in [1] angegebenen Formel (9) als Spezialfall ($p = 2$) herleiten; zu (4a) siehe Fußnote ³⁾. Beiden Rechenvorschriften kann man eine rechentechnisch günstigere Form geben; die hier gegebene Darstellung soll lediglich die Analogien zu den Beispielen der entsprechenden Verfahren der zweiten Klasse deutlich werden lassen.

³⁾ Eine Einteilung in Gruppen ungleichen Umfangs läßt sich genau so behandeln. Im Vortrag konnte aus Zeitmangel nur der Fall $k = 1$ ($m = r + 1$) erörtert werden.

Führt man diesen Grenzübergang G auf der rechten Seite von (2) durch, so erhält man im allgemeinen eine Funktion Φ^* der folgenden Form, durch welche sich wieder rekursiv eine Folge $\{y_q\}$ definieren läßt:

$$\left. \begin{aligned} y_{n+1} &= \Phi^*(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}; f(y_n), f'(y_n), \dots, f^{(m-1)}(y_n); \\ &\quad f(y_{n-1}), \dots, f^{(m-1)}(y_{n-1}); \dots; f(y_{n-k+1}), \dots, f^{(m-1)}(y_{n-k+1})) \end{aligned} \right\} \quad (k \leq n) \quad (10).$$

Diese zweite Klasse (Φ^*) besitzt gleichfalls die verallgemeinerte Fixpunkteigenschaft. In den Beispielen (4a), (4b) erhält man⁴⁾ für $k = 1$, also $m = r + 1 = 3$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} - \frac{\{f(y_n)\}^2 \cdot f''(y_n)}{2 \{f'(y_n)\}^3} \dots \dots \dots (11a),$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n) \cdot f'(y_n)}{\{f'(y_n)\}^2 - \frac{1}{2} f(y_n) \cdot f''(y_n)} \dots \dots \dots (11b).$$

Da der Grenzübergang G die Konstante C in (5) ungeändert läßt, erhält man daraus sofort

$$y_{n+1} - \xi = C (y_n - \xi)^m (y_{n-1} - \xi)^m \dots (y_{n-k+1} - \xi)^m \dots \dots \dots (12)$$

und mit

$$w_q = |C|^{1/r} |y_q - \xi| \dots \dots \dots (13)$$

die für große n gültige asymptotische Beziehung⁵⁾

$$w_{n+1} = w_n^\beta \quad (m \leq \beta < m + 1) \dots \dots \dots (14).$$

Für den Vergleich der beiden Verfahrensklassen werden nun über die Aufgabe die folgenden Annahmen gemacht:

1. Der Aufwand zur Berechnung der Ableitungen $f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)$ ist für jedes x nicht kleiner als der Aufwand A zur Berechnung von $f(x)$.
2. Der Aufwand zur Berechnung von Φ bzw. Φ^* kann gegenüber A vernachlässigt werden⁶⁾.
3. Die Schrittzahlen sind nicht zu klein.

Unter diesen Annahmen ist der Aufwand für einen Schritt nach (2) gleich A (einfacher Schritt), für einen Schritt nach (10) mindestens gleich $m A$ (m -facher Schritt). Damit kann man den Aufwand abschätzen, den man in beiden Fällen für eine vorgeschriebene Genauigkeitssteigerung benötigt. Es sei ⁷⁾

$$z_0 = w_0, \quad z_n = w_n^* \dots \dots \dots (15)$$

oder mit (7) und (14)

$$\alpha^n = \beta^{n^*} \dots \dots \dots (16).$$

Der Aufwand ist dabei

$$n A = \frac{\log \beta}{\log \alpha} n^* A \quad \text{bzw. mindestens } m n^* A,$$

und das Verhältnis dieser beiden Größen beträgt höchstens

$$\eta^* = \frac{\log \beta}{m \cdot \log \alpha} = \frac{\log \alpha^*}{\log \alpha} \dots \dots \dots (17)$$

mit

$$(\alpha^*)^m = \beta \quad (1 < \alpha^* < \alpha) \dots \dots \dots (18).$$

η^* soll als Wirkungsfaktor von (Φ^*) bezeichnet werden, α^* als (auf einen einfachen Schritt) reduzierter Konvergenzexponent⁸⁾.

⁴⁾ (11a) ist eine von EULER angegebene Erweiterung des NEWTONSchen Verfahrens, und (11b) findet sich als Spezialfall (A_2^0) bei E. SCHRÖDER [3], S. 352). (11b) darf nicht mit der — sehr ähnlichen — Formel verwechselt werden, die man erhält, wenn man die Nullstelle von $f(x)/f'(x)$ nach dem NEWTONSchen Verfahren berechnen will.

⁵⁾ Die Gleichungen (12) bis (14) gelten natürlich auch ohne Bezug auf das Verfahren (Φ) .

⁶⁾ Die Gültigkeit der Annahmen 1 und 2 hängt, wie man sieht, noch davon ab, welche Größe als Aufwandsmaß verwendet wird.

⁷⁾ Eine der beiden Beziehungen ist i. a. nur angenähert zu erfüllen.

⁸⁾ Kurz vor Tagungsbeginn erhielt Verf. Kenntnis von dem neu erschienenen Buch von OSTROWSKI [2]; dort wird die Größe α^* , etwas allgemeiner definiert, gleichfalls eingeführt und als „efficiency index“ bezeichnet. Damit werden auch Vergleiche zwischen verschiedenen Verfahren durchgeführt, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob zur Normierung der Abweichungen der gleiche Faktor verwendet werden kann (wie in (6) und (13)) oder nicht; dabei hängt das Verhalten im Einzelfall freilich noch wesentlich von der speziellen Funktion $f(x)$ ab.

Es gilt also der Satz:

Gibt es zu einem Verfahren (Φ^*) ein Verfahren (Φ) , aus welchem ersteres durch den Grenzübergang G hervorgeht, so benötigt man unter den obigen Annahmen nach dem Verfahren (Φ) für den gleichen Genauigkeitsgewinn höchstens den Bruchteil η^* des Aufwandes, der nach dem Verfahren (Φ^*) nötig ist.

Sobald es also gelingt, zu einem Verfahren (Φ^*) ein zugehöriges Verfahren (Φ) zu finden, arbeitet dieses mit geringerem Aufwand. Zur Auffindung eines solchen Verfahrens (Φ) muß man sich überlegen, für welche Klasse von Funktionen $\{f(x)\}$ das Verfahren (Φ^*) exakt arbeitet, d. h. bei beliebigen Anfangsnäherungen die Nullstelle im ersten Schritt liefert. Für die gleiche Funktionenklasse ist dann das exakt arbeitende Verfahren (Φ) aufzusuchen⁹⁾. Über die Auswahl eines speziellen Verfahrens (Φ) wird in anderem Zusammenhang berichtet.

In der folgenden Tabelle sind einige Zahlenwerte von α bzw. α^* (oberer Wert) und η^* (unterer Wert) angegeben.

| | Verf. (Φ) | Verfahren (Φ^*) | | | | |
|---------|----------------|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | | $m = 2$ | $m = 3$ | $m = 4$ | $m = 5$ | $m = 6$ |
| $r = 1$ | 1,618 | 1,414 0,72 | | | | |
| $r = 2$ | 1,839 | — | 1,442 0,60 | | | |
| $r = 3$ | 1,928 | 1,653 0,77 | — | 1,414 0,53 | | |
| $r = 4$ | 1,966 | — | — | — | 1,380 0,48 | |
| $r = 5$ | 1,984 | 1,709 0,78 | 1,559 0,65 | — | — | 1,348 0,44 |

Verfahren, die aufwandmäßig noch günstiger als die Verfahren (Φ) sind, dürften sich wohl nur dann ergeben, wenn man die Bedingung (3) abschwächt, z. B. ihre Gültigkeit nur für $j = 0$ fordert, oder durch eine andere, asymptotische ersetzt.

Literatur

- [1] G. OPITZ, ZAMM 38 (1958), S. 276—277.
- [2] A. M. OSTROWSKI, Solution of Equations and Systems of Equations, New York and London 1960, Academic Press.
- [3] E. SCHRÖDER, Math. Ann. 2 (1869/70), S. 317—365.
- [4] FR. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, 3. Aufl., Berlin 1957, Walter de Gruyter & Co.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. G. OPITZ, Dresden A27, Zeunerstr. 88

⁹⁾ Für die von EULER stammenden Erweiterungen des NEWTONschen Verfahrens (vgl. [4], S. 270 f) und die von E. SCHRÖDER ([3], S. 350 ff.) angegebenen Algorithmen (A_w^A) und (B_w^A) ist diese Aufgabe gelöst. Z. B. arbeiten (4a) und (11a) exakt, wenn die Umkehrfunktion von $f(x)$ ein beliebiges Polynom zweiten Grades ist, und für (4b) und (11b) gilt dies, wenn $f(x) = (x + a)/(bx + c)$ ist (a, b, c beliebig). Während also im allgemeinen keiner dieser beiden Formeln der unbedingte Vorrang einzuräumen ist, wird man (4a) verwenden, wenn $f(x)$ in der Nähe von ξ einen Verzweigungspunkt vom Charakter der Quadratwurzel besitzt, und (4b) benutzen, wenn sich in der Nähe von ξ ein einfacher Pol von $f(x)$ befindet.

Fehleruntersuchungen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme durch elektronische Digitalrechner

VON GERHARD PATZELT

Unter der Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (1)$$

für die n Unbekannten x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) versteht man jene n Zahlenwerte x_k , die allen Gleichungen des Systems (1) genügen. Es ist seit langem bekannt, daß ein solches System eine und nur eine Lösung besitzt, wenn sowohl der Rang der Matrix der a_{ik} als auch der Rang der durch die a_i erweiterten Koeffizientenmatrix n beträgt.

In der Rechenpraxis ist es jedoch keineswegs immer einfach zu entscheiden, ob dieser Fall vorliegt. Wollte man z. B. nur den Wert einer Determinante zehnten Grades mit zehnstelligen Elementen genau berechnen, so müßte man mit hundert Dezimalen arbeiten. Bei der Lösung eines Gleichungssystems würde sich die Anzahl der Stellen wegen der erforderlichen Divisionen noch vervielfachen. Ein Rechnen mit soviel Dezimalen ist in der Praxis jedoch undurchführbar, und daher müssen die Zwischenergebnisse immer wieder abgerundet werden. Die dadurch entstehenden Rundungsfehler können sich je nach Beschaffenheit der Koeffizientendeterminante so stark bemerkbar machen, daß die rechnerische Lösung eines Gleichungssystems auf völlig verschiedene Ergebnisse führt, wenn verschiedene Rechenprogramme benutzt oder geringfügig abgeändert werden.

Die Anzahl der Stellen, mit denen die Lösungen eines Gleichungssystems errechnet werden, ist daher für die Rechensicherheit eines Programms von ausschlaggebender Bedeutung. Es ist keineswegs so, daß sich die Anzahl der richtigen Stellen der Lösung nur verdoppelt, wenn die Rechnung mit der doppelten Stellenzahl durchgeführt wird. Vielmehr kommen erfahrungsgemäß etwa so viele neue richtige Stellen hinzu, wie bei der Rechnung mit erhöhter Stellenzahl mehr genommen wurden. Bei der Herstellung eines Programms bedeutet dies ein Rechnen mit doppelter Wortlänge. Die Nachteile hierbei sind doppelter Speicherbedarf für die a_{ik} und je nach Beschaffenheit der Rechenanlage ein etwa vierfacher Zeitaufwand.

Unabhängig von der Stellenzahl wird auch immer wieder nach einem möglichst sicheren Verfahren gesucht werden. Relaxationsverfahren, die eine symmetrische Koeffizientendeterminante voraussetzen, sind an Rechensicherheit dem GAUSSschen Algorithmus unterlegen. Hier muß i. a. erst die GAUSSsche Transformation durchgeführt werden und dadurch ist der Wert der symmetrischen Determinante gleich dem Quadrat der Determinante des ursprünglichen Gleichungssystems.

Beim GAUSSschen Algorithmus wird zunächst bei jedem Schritt eine „Zeile“ und eine „Spalte“ eliminiert, d. h. n Gleichungen für n Unbekannte werden auf $n - 1$ Gleichungen für $n - 1$ Unbekannte zurückgeführt. Die Koeffizienten des neuen Gleichungssystems sind dann

$$a'_{ik} = \frac{a_{i1}}{a_{z1}} \cdot a_{zk} - a_{ik} \quad \dots \quad (2),$$

wobei z der Zeilenindex der eliminierten Zeile ist. Diese Elimination wird so oft wiederholt, bis alle jeweils eliminierten Zeilen zusammen ein „gestaffeltes Gleichungssystem“ bilden, welches die Form

$$\sum_{k=l}^n a_{zk} x_k = a_z \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \quad (3)$$

annimmt, wenn die Unbekannten in der Reihenfolge x_1, x_2, \dots, x_n eliminiert wurden. Die Auflösung dieses Systems kann nunmehr nach

$$x_l = \frac{1}{a_{zl}} \left[a_z - \sum_{k=l+1}^n a_{zk} x_k \right] \quad (l = n, n-1, \dots, 2, 1) \quad \dots \quad (4)$$

erfolgen $\left(\sum_{k=n+1}^n = 0 \right)$.

Bei den Eliminationen ist es erfahrungsgemäß von größter Wichtigkeit, daß jeweils jene Zeile herausgesucht wird, bei der das erste Glied von absolut größtem Wert gegenüber den anderen ist. Schon ein versuchsweises Arbeiten mit der Zeile mit absolut zweitgrößtem ersten Glied a_{i1} führte bei schwer auflösbaren Gleichungssystemen zu wesentlich ungenaueren Lösungen. Der Wert der Koeffizientendeterminante $D = |a_{ik}|$ ist gleich dem Produkt aller a_{zi} . Ist D sehr klein, so sind auch die Nenner a_{zi} in (4) klein. Wurden die zur Elimination bestimmten Zeilen in der beschriebenen Weise herausgesucht, so gilt, von eventuellen geringen Schwankungen abgesehen

$$a_{z,l+1} < a_{zl} \quad \dots \quad (5).$$

Im anderen Falle können die Größen der Hauptdiagonalglieder a_{zi} des gestaffelten Systems (3) völlig willkürlich und um mehrere Zehnerpotenzen schwanken. Dadurch entstehen noch wesentlich kleinere Nenner in (4) als im ersten Fall. Je kleiner aber die Nenner sind, um so kleiner sind auch die Zähler und um so stärker macht sich dort der „Stellenschwund“ bei der Subtraktion wenig voneinander verschiedener Zahlen bemerkbar. Das Verfahren von BANACHIEWICZ gestattet nicht ein Heraussuchen von Zeilen. Daher ist auch dieses Verfahren dem GAUSSschen Algorithmus an Rechensicherheit unterlegen.

Es soll jetzt ein Verfahren beschrieben werden, bei dem der GAUSSsche Algorithmus abgeändert wurde, daß alle Glieder in der Hauptdiagonale des gestaffelten Gleichungssystems größer sind als in (3). Hierbei wird nicht jeweils eine bestimmte Zeile des Gleichungssystems

eliminiert, sondern es wird aus n Gleichungen durch Addition bzw. Subtraktion eine neue Gleichung der Form

$$\sum_{k=1}^n s_k x_k = s \quad \text{mit} \quad s_k = \sum_{i=1}^n \sigma_i a_{ik} \dots \dots \dots (6)$$

aufgestellt, wobei $\sigma_i = +1$ wenn $a_{i1} \geq 0$ und $\sigma_i = -1$ wenn $a_{i1} < 0$ ist. Mittels dieser Gleichung wird das System (1) auf n Gleichungen für $n-1$ Unbekannte mit den Koeffizienten

$$a'_{ik} = \frac{a_{i1}}{s_1} \cdot s_k - a_{ik} \dots \dots \dots (7)$$

zurückgeführt. Auch dieses Verfahren wird so oft wiederholt, bis alle Gleichungen (6) ein gestaffeltes System bilden. Das Produkt der Hauptdiagonalglieder ist hierbei nicht mehr gleich der Determinante $|a_{ik}|$, sondern um viele Zehnerpotenzen größer, denn jedes einzelne Glied ist hierbei die Summe der absoluten Beträge aller ersten Glieder von jeweils n Gleichungen. Die Rundungsfehler bei den einzelnen Eliminationsprozessen werden durch die Additionen von jeweils n Gleichungen zudem weitgehend ausgeglichen. Auch bei diesem „GAUSSschen Algorithmus mit Zeilensummierung“ gilt annähernd (5).

Dieses Verfahren hat sich als noch wesentlich sicherer erwiesen als der GAUSSsche Algorithmus in seiner ursprünglichen Form. Der Umfang des Rechenprogramms ist von dem des letzteren nicht wesentlich verschieden. An die Stelle des Heraussuchens des absolut größten ersten Koeffizienten treten hier die Additionsbefehle zum Addieren der Gleichungen. Der Bedarf an Speicherplätzen für die a_{ik} strebt hierbei einem Maximum zu, welches bei $n(n+p) + 1/2 p(p+1)$ liegt, wenn $p \geq 1$ die Anzahl der Gleichungssysteme mit gleichen a_{ik} bedeutet. Die Rechenzeiten sind freilich spürbar größer als beim ursprünglichen GAUSSschen Algorithmus. Allerdings kann man von der Anzahl der zusätzlichen Rechenoperationen nicht auf den Zeitaufwand schließen, da auch die organisatorischen Arbeiten Zeit erfordern. Erfahrungsgemäß erfordert die Zeilensummierung etwa 30% mehr Rechenzeit.

Zur Verbesserung der nach dem GAUSSschen Algorithmus gefundenen Lösung x_k wird oft eine Nachiteration versucht. Beim Einsetzen dieser Lösung in das System (1) entstehen die Zeilenfehler $F_i = a_i - \sum a_{ik} x_k$. Durch den Lösungsansatz $x_k^{(q+1)} = x_k^{(q)} + \Delta x_k^{(q)}$ kommt man auf ein lineares Gleichungssystem für die Verbesserungen mit derselben Koeffizientendeterminante a_{ik} und den neuen „rechten Seiten“ F_i an Stelle der a_i . Es zeigt sich, daß diese Nachiteration in den allermeisten Fällen nur für sehr wenige Schritte sinnvoll ist, da sich dann keine weiteren Verbesserungen mehr ergeben. Ist die Koeffizientendeterminante $|a_{ik}|$ sehr klein, so wird die Folge der $x_k^{(q)}$ jedoch von vornherein divergieren. In diesem Falle wächst die Summe der absoluten Beträge der Zeilenfehler, von gewissen Schwankungen abgesehen, nach den Gesetzen einer Exponentialfunktion monoton an:

$$\sum |F_i| \approx a \cdot 10^{bq} \quad (a > 0, b > 0) \dots \dots \dots (8).$$

Zahlreiche Vergleiche von mehreren Rechenprogrammen lassen darauf schließen, daß dieses Anwachsen der Zeilenfehler bei divergierender Nachiteration als Maß für die Rechensicherheit eines Programms gelten kann. So hat sich unter anderem in zwei Beispielen zum Vergleich des GAUSSschen Algorithmus mit und ohne Zeilensummierung ein Verhältnis der Konstanten b von 1:3 bzw. 4:15 ergeben.

Anschrift: Dr. G. PATZELT, Gummersbach/Rhld., in Fa. Steinmüller GmbH.

Eine Matrixmethode zur Lösung der Anfangswertaufgaben linearer Differenzgleichungen*)

VON ÁRPÁD PETHÖ

§ 1. Über den Ring der Zahlenfolgen in Matrizen-Darstellung

1. Betrachten wir die unendlichen Matrizen (mit komplexen Elementen)

$$A = (\delta_{|i-j|, i-j} \lambda_{i-j}); \quad i, j = 0, 1, \dots \dots \dots (1.1),$$

wo $\delta_{\mu, \nu}$ das KRONECKERSche Symbol bedeutet, d. h. die Matrizen folgender Form (im folgenden Λ -Matrizen genannt):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_0 & 0 & \dots \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \dots \dots \dots (1.2).$$

*) Der angekündigte Vortrag konnte auf der Tagung nicht gehalten werden.

Wird in (1.1) $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0$, $\lambda_1 = 1$ gewählt, somit die A -Matrix

$$Z \equiv (\delta_{i-j,1}); \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

definiert, so können die A -Matrizen als Potenzreihen mit numerischen Koeffizienten von Z dargestellt werden (definitionsgemäß $Z^0 = E = (\delta_{i,j})$):

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^k.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die A -Matrizen einen (kommutativen) hyperkomplexen Ring über dem Ring der komplexen Zahlen [1] definieren, in dem die Rechengesetze gelten

$$\lambda \sum \lambda'_k Z^k = \sum (\lambda \lambda'_k) Z^k \quad (1.4),$$

$$\sum \lambda'_k Z^k + \sum \lambda''_k Z^k = \sum (\lambda'_k + \lambda''_k) Z^k \quad (1.5),$$

$$\sum \lambda'_k Z^k \cdot \sum \lambda''_k Z^k = \sum (\lambda'_0 \lambda''_0 + \dots + \lambda'_n \lambda''_n) Z^k \quad (1.6).$$

Wir bemerken nunmehr Folgendes: ordnet man der A -Matrix (1.1) die Zahlenfolge $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ bzw. ihre erzeugende Funktion $g(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \dots$ zu, so entsprechen die Regeln (1.4) — (1.5) — (1.6) denjenigen, welche sich auf die Addition und Multiplikation der erzeugenden Funktionen beziehen. Solange es jedoch der Fall sein kann, daß $g(z)$ allein bei $z = 0$ konvergiert und so nicht mehr fähig ist, die Zahlenfolge $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ „darzustellen“, ist die Matrix-Repräsentation dieser Zahlenfolge per definitionem immer möglich, was zur Folge hat, daß auch jeweils die Rede von der Summe und dem Produkt zweier Zahlenfolgen im Sinne der Matrizen-Zuordnung sein kann. Wir können somit den kommutativen Ring der Zahlenfolgen allgemein definieren. Unser Verfahren, nach dem die Zahlenfolgen umkehrbar eindeutig auf die A -Matrizen abgebildet werden, kann im wesentlichen als eine Matrizen-Darstellung der Operatorenrechnung von MIKUSINSKI angesehen werden, diese auf die Zahlenfolgen als spezielle Funktionen angewendet [2], [3].

2. Was die Division im obigen Matrizenring anbetrifft, so gilt, daß die A -Matrizen im Falle $\lambda_0 \neq 0$ (im weiteren sei dann jeweils $\lambda_0 = 1$) ein zu diesem Matrizenring gehöriges inverses Element besitzen. Dies sieht man sofort aus der Gleichung (1.6), nach der die Elemente der Inverse rekurrend berechnet werden können. Für den Fall, wo A ein Polynom vom Grade n von Z , also wie folgt darstellbar ist:

$${}_n A \equiv \sum_{k=0}^n \lambda_k Z^k \quad \text{und} \quad \lambda_0 = 1 \quad (1.7),$$

wollen wir die Inverse auch explizit darstellen.

Es ist leicht einzusehen, daß

$${}_n A^{-1} = \left(E + \sum_{k=1}^n \lambda_k Z^k \right)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^n \lambda_k Z^k \right)^v \quad (1.8)$$

zutrifft, solange die unendliche Summe $\sum_{v=0}^{\infty} \dots$ existiert; davon aber kann man sich überzeugen, indem ${}_n A^{-1}$ nach den Potenzen von Z geordnet und auf diese Weise der Beiwert von Z^k (mit $\lambda_k^{(n)}$ bezeichnet) bestimmt wird:

$$\lambda_k^{(n)} = \sum_{k_1 + \dots + n k_n = k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1) k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (-\lambda_1)^{k_1} \dots (-\lambda_n)^{k_n}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.9),$$

wo k_1, k_2, \dots, k_n nichtnegative ganze Zahlen sind. Dadurch ist ${}_n A^{-1}$ als Element des Ringes der A -Matrizen:

$${}_n A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} Z^k \quad (1.10)$$

bis auf die Auflösung der diophantischen Gleichung $k_1 + 2 k_2 + \dots + n k_n = k$ explizit dargestellt worden.

Wenn die Nullstellen z_1, \dots, z_m ($m \leq n$) des Polynoms $\sum_{k=0}^n \lambda_k z^{n-k}$ mit den Ordnungszahlen ihres Vorkommens $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ($\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$), somit die Partialbruchzerlegung

$${}_n A^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \lambda_k Z^k} = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^{\alpha_r} \frac{a_{rs}}{(E - z_r Z)^s} \quad (1.11)$$

bekannt ist, lassen sich die Koeffizienten $\lambda_k^{(n)}$ in (1.10) auch in einer anderen Weise bestimmen; es besteht nämlich die Identität

$$\frac{1}{(E - z_r Z)^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+s-1}{s-1} z_r^k Z^k \quad \dots \quad (1.12),$$

woraus folgt

$$\lambda_k^{(n)} = \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^{\alpha_r} a_{rs} \binom{k+s-1}{s-1} z_r^k \quad \dots \quad (1.13).$$

§ 2. Lösung von gewöhnlichen linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir wollen nunmehr die im § 1 definierte gegenseitige Zuordnung von Zahlenfolgen und A -Matrizen auf die Lösung gewöhnlicher linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten anwenden. Dazu brauchen wir nur zwei triviale Bemerkungen ins Auge zu fassen:

1. Die Zuordnung ist eine homogen-lineare, d. h. wenn λ'_k und λ''_k ($k = 0, 1, \dots$) zwei Zahlenfolgen und weiterhin c_1 und c_2 zwei Zahlen sind, so gilt

$$c_1 \lambda'_k + c_2 \lambda''_k \sim c_1 A' + c_2 A'' \quad \left(A' = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda'_k Z^k, A'' = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda''_k Z^k \right) \quad \dots \quad (2.1),$$

wo \sim das Zeichen der Zuordnung ist.

2. Es besteht die „Verschiebungsregel“

$$Z^s \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+s} Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k Z^k - \sum_{k=0}^{s-1} \lambda_k Z^k \quad \dots \quad (2.2),$$

wo s eine positive ganze Zahl bezeichnet.

Wir können somit der Differenzgleichung

$$a_n u_{k+n} + a_{n-1} u_{k+n-1} + \dots + a_0 u_k = b_k; \quad k = 0, 1, \dots \quad (a_n = 1) \quad \dots \quad (2.3)$$

(wo b_k eine bekannte Zahlenfolge ist) mit den Anfangswerten

$$u_\sigma = u^{(\sigma)}; \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1 \quad \dots \quad (2.4)$$

die folgende Matrizengleichung zuordnen, nachdem wir die beiden Seiten von (2.3) mit Z^n multipliziert und (2.1)–(2.2) berücksichtigt haben:

$$a_n \left(A - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)} Z^k \right) + a_{n-1} Z \left(A - \sum_{k=0}^{n-2} u^{(k)} Z^k \right) + \dots + a_0 Z^n A = Z^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^k \quad (2.5),$$

wo

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} u_k Z^k$$

gesetzt worden ist.

Umgestellt schreibt sich (2.5):

$$A = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k Z^{k+n} + c_{n-1} Z^{n-1} + \dots + c_0 E}{a_n E + a_{n-1} Z + \dots + a_0 Z^n} \quad \dots \quad (2.6)$$

mit

$$c_\sigma = a_n u^{(\sigma)} + \dots + a_{n-\sigma} u^{(0)}; \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1 \quad \dots \quad (2.7).$$

Es ist nun nach (1.7)–(1.10) gestattet zu setzen

$$\frac{1}{a_n E + \dots + a_0 Z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} Z^k \quad \dots \quad (2.8)$$

(wo $\lambda_k^{(n)}$ gemäß (1.9) oder (1.13) berechnet werden kann), wodurch man nach Ausmultiplizieren aus (2.6) erhält

$$u_k = b_{k-n} \lambda_0^{(n)} + \dots + b_0 \lambda_{k-n}^{(n)} + c_{n-1} \lambda_{k-n+1}^{(n)} + \dots + c_0 \lambda_k^{(n)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.9),$$

hierbei ist unter einem Ausdruck mit negativem Index Null zu verstehen. Nach einer Umstellung wird (2.9)

$$u_k = b_{k-n} \lambda_0^{(n)} + \dots + b_0 \lambda_{k-n}^{(n)} + d_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + d_0 u^{(0)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.9),$$

wo

$$d_\sigma = a_{\sigma+1} \lambda_{k-n+1}^{(n)} + \dots + a_n \lambda_{k-\sigma}^{(n)}; \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.10),$$

wodurch die Lösung von (2.3)–(2.4) explizit dargestellt worden ist.

In einer ähnlichen Weise kann die Lösung der Anfangswertaufgaben von linearen partiellen Differenzengleichungen in dem Falle dargestellt werden, wo die Koeffizienten von einer Veränderlichen unabhängig sind [4].

Literatur

- [1] L. RÉDEI, Algebra 1. Teil, Leipzig 1959, Akad. Verlagsges.
- [2] J. MIKUSINSKI, Operatorenrechnung (Übersetzg. a. d. Polnisch.), Berlin 1957, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [3] I. FENYŐ, Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen, Periodica Polytechnica (Elektrotechnik) **3** (1959), S. 135–151.
- [4] Á. PETHŐ, Eine Matrixmethode zur Lösung von Anfangswertaufgaben linearer Differenzengleichungen, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences **5** (1960), S. 203–213.

Anschrift: Dr.-Ing., Dipl.-Math. ÁRPÁD PETHŐ, Zentralforschungsinstitut für Chemie der Ungar. Akad. d. Wiss., Budapest, XIV., Hungaria krt 114, Ungarn

Über die mathematische Theorie der atomischen Reaktoren

VON ANTONIO PIGNEDOLI

I.

Schon seit verschiedenen Jahren habe ich das Problem der Verlangsamung und Diffusion der schnellen Neutronen in einem verlangsamenden Medium studiert. Die einschlägige Literatur ist bekanntlich sehr ausgedehnt und wichtig¹⁾.

Eine strenge Behandlung des Problems kann mit Hilfe der MAXWELL-BOLTZMANNschen Transporttheorie erfolgen. In diesem Sinne habe ich für einen eindimensionalen Fall (in einem halbunendlichen Medium) durch eine doppelte L -Transformation die Lösung der MAXWELL-BOLTZMANNschen Integro-Differentialgleichungen wie folgt gegeben.

Nennen wir $F(x, \cos \theta, t)$, $-\infty \leq x \leq 0$ die Verteilungsfunktion der Neutronen in der Richtung der x -Achse. Diese Funktion ist offenbar von der x -Koordinate, von der Zeit t , vom Kosinus des Winkels θ unter der x -Achse und vom Geschwindigkeitsvektor v abhängig. So haben wir für die Funktion $F(x, \cos \theta, t)$, die Integro-Differentialgleichung von MAXWELL-BOLTZMANN:

$$\frac{\partial F(x, \cos \theta, t)}{\partial t} + v \cos \theta \frac{\partial F(x, \cos \theta, t)}{\partial x} = \omega_0 \int_0^\pi F(x, \cos \theta', t) \frac{1 + 3 P \cos \theta \cos \theta'}{2} \sin \theta' d\theta' \quad (1),$$

wo v , ω_0 und P konstant sind. Für die Funktion $F(x, \cos \theta, t)$ müssen wir die Randbedingung

$$F(x, \cos \theta, t) = 0 \quad \text{für } x = 0, \quad \cos \theta \leq 0 \quad (2)$$

festhalten.

¹⁾ Vgl. z. B. E. FERMI, *Ricerca scientifica* 1936.
 G. C. WICK, *Rendiconti della R. Accademia dei lincei* 1936.
 idem: *Zeitschrift für Physik* 1943.
 N. ARLEY, *Dansk. Vid. Selsk. Medd.* 1938.
 R. E. MARSHAK, *Reviews of modern Physics* 1947.
 E. FERMI, *Science* 1947.
 M. VERDE, *Nuovo Cimento* 1947.
 A. PIGNEDOLI, *Atti del Seminario mat. e fis. dell'Università di Modena* 1947–48.
 C. SALVETTI, *Nuovo Cimento* 1949.
 A. PIGNEDOLI, *Annali di matematica pura e applicata* 1951.
 idem: *Journal of rational Mechanics and Analysis* 1955.
 idem: *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova* 1956.
 S. GLASSTONE und M. C. EDLUND, *The elements of nuclear reactor theory*, New York, 1957.
 Vgl. außerdem: „*Proceedings*“ der zwei internationalen Kongresse von Genf.

Multiplizieren wir Gleichung (1) mit $e^{-pt+qx} dt dx$ und integrieren wir über t zwischen 0 und $+\infty$ und über x zwischen $-\infty$ und 0. Außerdem setzen wir:

$$\varphi(p, \cos \theta) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} F(0, \cos \theta, t) dt \quad \dots \quad (3),$$

$$\Psi(q, \cos \theta) = \int_{-\infty}^0 e^{qx} F(x, \cos \theta, 0) dx \quad \dots \quad (3_1),$$

$$\Phi(p, q, \cos \theta) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \int_{-\infty}^0 e^{qx} F(x, \cos \theta, t) dx \quad \dots \quad (3_2),$$

wo $\varphi(p, \cos \theta)$ und $\Psi(q, \cos \theta)$ wegen der Anfangsbedingungen als bekannte Funktionen zu betrachten sind. (Man kann beweisen, daß die Funktion Ψ mit φ in bekannter Weise verbunden ist.) So haben wir für die doppelte L -Transformierte $\Phi(p, q, \cos \theta)$ der unbekannten Funktion $F(x, \cos \theta, t)$ die Integralgleichung:

$$\begin{aligned} & -\Psi(q, \cos \theta) + p \Phi(p, q, \cos \theta) + v \cos \theta [\varphi(p, \cos \theta) - q \Phi(p, q, \cos \theta)] \\ & = \omega_0 \int_0^\pi \Phi(p, q, \cos \theta') \frac{1 + 3 P \cos \theta \cdot \cos \theta'}{2} \sin \theta' d\theta' \quad \dots \quad (4), \end{aligned}$$

mit der Randbedingung

$$\varphi(p, \cos \theta) = 0 \quad \text{wenn} \quad \cos \theta \leq 0 \quad \dots \quad (5).$$

Um die Integralgleichung (4) zu lösen, kann man annehmen, daß φ , Ψ und Φ in konvergenten Reihen der Art:

$$\varphi(p, \cos \theta) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varphi_m(\cos \theta)}{p^m} \quad \dots \quad (6),$$

$$\Psi(q, \cos \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Psi_n(\cos \theta)}{q^n} \quad \dots \quad (6_1),$$

$$\Phi(p, q, \cos \theta) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{\Phi_{mn}(\cos \theta)}{p^m q^n} \quad \dots \quad (6_2)$$

entwickelt werden können. Man kann alle Koeffizienten $\Phi_{mn}(\cos \theta)$ berechnen. Die Sätze über die L -Transformation von Reihen und über die Eindeutigkeit der L -Transformation sind in unserem Fall gültig. Man findet die Lösung:

$$F(x, \cos \theta, t) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} \Phi_{mn}(\cos \theta) \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \dots \quad (7).$$

Die doppelte Reihe in der rechten Seite der Gleichung ist absolut und gleichförmig konvergent. Sie ist L -transformierbar. Außerdem befriedigt (7) die Randbedingung.

II.

Für die mathematische Behandlung der atomischen Reaktoren ist aber bekanntlich eine lediglich phänomenologische Theorie genügend. Das Leben eines Neutrons in einem atomischen Fissionsreaktor zerfällt in zwei Perioden. Die erste davon erstreckt sich über die Zeit die vom Austritt der raschen Fissionsneutronen zur Ankunft derselben zur Schwelle der thermischen Energie vergeht. Die zweite Periode umfaßt die Zeit, in der die thermischen Neutronen als solche bis zu deren Gefangennahme und den neuen Fissionen verharren. Wir ziehen nun eine beschränkte Verlangsamungszeit in Betracht und stellen somit folgende Differentialgleichung auf, die zugleich die Verlangsamung und die Diffusion der schnellen Neutronen beschreibt. Es ist die Differentialgleichung der sogenannten "age theory", die unterhalb der Fissionsschwelle und der Schwelle der thermischen Energie gültig ist:

$$\frac{\partial \chi(x, y, z, t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{D(\tau)} \frac{\partial \chi(x, y, z, t, \tau)}{\partial t} = \Delta_2 \chi(x, y, z, t, \tau) + S_1(x, y, z, t, \tau) \quad \dots \quad (8),$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

(χ = Funktion der Verlangsamungsdichte, und S_1 = Funktion der Neutronenquellen).

Der Lebenslauf der thermischen Neutronen wird hingegen durch folgende Differentialgleichung beschrieben, die die Diffusion der thermischen Neutronen darstellt:

$$\frac{\partial \varrho(x, y, z, t)}{\partial t} = S(x, y, z, t) + D \cdot \Delta_2 \varrho(x, y, z, t) = \sigma_a v \varrho(x, y, z, t) \quad \dots \quad (9),$$

wo D , σ_a und v konstant sind.

Da die Verlangsamungszeit verhältnismäßig kurz ist, kann man den Durchschnittswert D_m des Koeffizienten $D(\tau)$ nehmen. Außerdem können wir von der Funktion χ verlangen, daß sie der Anfangsbedingung $\chi(x, y, z, t, 0) = 0$ genügt, und wir müssen die Randbedingung

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} + h \chi = 0, \quad (n = \text{norm}, h = \text{konst.}) \quad \dots \quad (10)$$

aufstellen. Wenn wir dann in bezug auf die "age" τ L -transformieren, erhalten wir:

$$\Delta_2 \bar{\chi} - \frac{1}{D_m} \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} - K \bar{\chi} = -\bar{S}_1, \quad (K = \text{Param. von } L\text{-Transform.}) \quad \dots \quad (11).$$

Im Gebrauch dieser Gleichung müssen wir eine Anfangsbedingung in bezug auf die Zeit t berücksichtigen. Haben wir nun die so bedingte Gleichung gelöst, führen wir die Funktion χ (die wir durch eine L_1 -Transformation erhalten) für $\tau = \tau_0$ als Funktion der Quellen in die Differentialgleichung der Diffusion ein (τ_0 ist der Wert von τ der mit der thermischen Schwelle übereinstimmt).

Berücksichtigen wir also die Differentialgleichung der Diffusion:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = S + D \cdot \Delta_2 \varrho - \sigma_a v \varrho \quad \dots \quad (12),$$

mit der Randbedingung $\frac{\partial \varrho}{\partial n} + h \varrho = 0$.

Setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} \varrho(x, y, z, t) &= e^{-\sigma_a v t} R(x, y, z, t), \quad S(x, y, z, t) = D e^{-\sigma_a v t} Q(x, y, z, t), \\ Q(x, y, z, t) &= f_1(x, y, z) \cos \omega t + f_2(x, y, z) \sin \omega t, \\ R(x, y, z, t) &= U_1(x, y, z) \cos \omega t + U_2(x, y, z) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13),$$

so haben wir in realen Felde das System von Differentialgleichungen:

$$\Delta_2 U_1 - \frac{\omega}{D} U_2 = f_1, \quad \Delta_2 U_2 + \frac{\omega}{D} U_1 = f_2 \quad \dots \quad (14),$$

d. h. im komplexen Felde, die Differentialgleichung:

$$\Delta_2 U + \Lambda U = f, \quad \left(\Lambda = \frac{i \omega}{D}, \quad U = U_1 + i U_2, \quad f = f_1 + i f_2 \right) \quad \dots \quad (15),$$

mit der Randbedingung $\frac{\partial U}{\partial n} + h U = 0$.

Betrachten wir das entsprechende homogene Problem:

$$\Delta_2 U + \lambda U = 0, \quad \text{mit der Randbedingung } \frac{\partial U}{\partial n} + h U = 0 \quad \dots \quad (16);$$

wenn λ_k die Eigenwerte des homogenen Problems sind, so erhalten wir für unser Problem die Lösung in Form einer Reihe von Eigenfunktionen:

$$U(x, y, z) = \sum_k A_k U_k(x, y, z) \quad \dots \quad (17),$$

wo

$$A_k = \frac{\int_C f U_k dC}{\Lambda - \lambda_k}, \quad (C = \text{Raum des Verlangsamenden Mediums}).$$

III.

Nun kommen wir im besonderen zum Problem des atomischen Fissionsreaktors. Wie bekannt, können wir:

$$S(x, y, z, t) = K_\infty \sigma_a v \varrho(x, y, z, t) \quad \dots \quad (18),$$

(K_∞ = Multiplikationskoeffizient der Neutronen) nehmen.

Somit wird die Differentialgleichung der Diffusion:

$$A_2 \varrho + \frac{K_\infty - 1}{M^2} \varrho = \frac{1}{\sigma_a v M^2} \frac{\partial \varrho}{\partial t} \dots \dots \dots (19),$$

wo M die Wanderungslänge ist. Bei kritischen Bedingungen wird die Dichte ϱ von der Zeit unabhängig. Man findet daher diese kritische Dichte wenn man die erste harmonische Lösung der Differentialgleichung:

$$A_2 \varrho + K^2 \varrho = 0, \quad (K^2 = (K_\infty - 1)/M^2) \dots \dots \dots (20)$$

findet.

Besonderes Interesse bietet der Fall eines verlangsamen Mediums, in Form eines elliptischen Zylinders. Man kann bei der Lösung auf den Gebrauch der Funktionen von MATHIEU verzichten und statt deren die transzendenten epizycloidalen Funktionen von AGOSTINELLI²⁾ zu Hilfe nehmen. In der Ebene und in elliptischen (ξ, η) Koordinaten haben wir für die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} p^2 c^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) u = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + q^2 Z = 0, \quad (\varrho = u(\xi, \eta) Z(z))$$

(c = halbe Fokaldistanz, $K^2 = p^2 + q^2$) mit den Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial n} + h u = 0$ (über die zeitliche Fläche der Zylinder), $\frac{dZ}{dz} - hZ = 0$ für $z = 0$, $\frac{dZ}{dz} + hZ = 0$ für $z = l$, Lösungen der folgenden vier Formen:

$$V = \sum_{s=0}^{\infty} \cos(2s\eta) \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} F_{2m,s}(\xi, p),$$

$$\bar{V} = \sum_{s=1}^{\infty} \cos(2s+1)\eta \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m+1} F_{2m+1,s}(\xi, p),$$

$$V^* = \sum_{s=1}^{\infty} \sin(2s\eta) \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m}^* G_{2m,s}(\xi, p),$$

$$\bar{V}^* = \sum_{s=0}^{\infty} \sin(2s+1)\eta \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1}^* G_{2m+1,s}(\xi, p),$$

wo (J_m nennen wir die BESSELSche Funktion der ersten Art und von der m -ten Ordnung):

$$F_{2m,0}(\xi, p) = J_m\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_m\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right),$$

$$F_{2m,s}(\xi, p) = J_{m+s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right) + J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m+s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right),$$

$$G_{2m,s}(\xi, p) = J_{m+s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right) - J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m+s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right),$$

$$F_{2h+1,s}(\xi, p) = J_{m+s+1}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right) + J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m+s+1}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right),$$

$$G_{2h+1,s}(\xi, p) = J_{m+s+1}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right) - J_{m-s}\left(\frac{1}{2} p c e^\xi\right) J_{m+s+1}\left(\frac{1}{2} p c e^{-\xi}\right).$$

Man kann sehen, daß es möglich ist, den Randbedingungen zu genügen. Die Eigenwerte des Parameters p werden unter Zuhilfenahme des sogenannten »Principe des Réduites de FOURIER« annähernd gefunden.

Haben wir die Eigenwerte p gefunden, berücksichtigen wir die vier entsprechenden Reihen der Eigenfunktionen V_j , \bar{V}_j , V_j^* und \bar{V}_j^* . Diese Eigenfunktionen bilden ein vollständiges System und genügen der Orthogonalitätsbedingung.

Anschrift: Prof. Dr. ANTONIO PIGNEDOLI, Università di Bologna, Istituto Matematico, Bologna, Italien

²⁾ Vgl. C. AGOSTINELLI, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1951—52.

Streuung des Vektorfeldes an einem isotropischen Zentrum

Von M. RIBARIČ*)

Auf der Oberfläche der Einheitskugel haben wir das eindeutig definierte Vektorfeld $i(\varphi'', \vartheta'')$, welches in Matrixform dargestellt wird,

$$i(\varphi'', \vartheta'') = ||i_k(\varphi'', \vartheta'') \delta_{x,j}||, \quad k, j = x, y, z \quad \dots \dots \dots (1).$$

Mit dem Vektorfelde $i(\varphi'', \vartheta'')$ soll durch die Relation

$$j(\varphi', \vartheta') = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mathfrak{f}(\varphi', \vartheta', \varphi'', \vartheta'') i(\varphi'', \vartheta'') d \cos \vartheta'' d\varphi'' \quad \dots \dots \dots (2)$$

das Vektorfeld $j(\varphi', \vartheta')$ definiert sein. Dabei ist die Matrix \mathfrak{f} solcher Art, daß die Relation (2) isotrop ist und das Integral (2) für alle Vektorfelder i existiert, deren Norm quadratisch integabel ist.

Es wurde gezeigt:

1. daß die Matrix $\mathfrak{f}(\varphi', \vartheta', \varphi'', \vartheta'')$ wegen der vorausgesetzten Isotropie der Relation (2), durch ihre Werte $\mathfrak{f}(0, \vartheta', 0, 0)$ bestimmt ist, und
2. daß die Relation (2) der Relation

$$||j_m(\varphi, \vartheta) \delta_{-1,n}|| = \sum_{l,j} \frac{1}{2l+1} ||e^{ij\varphi} P_{mj}^l(\cos \vartheta) \delta_{mn}|| ||k_{mn}'|| ||i_{mj}^l \delta_{-1,n}||, \quad m, n = -1, 0, 1 \quad (3)$$

gleichwertig ist, wo k_{mn}^l durch folgenden Ausdruck

$$k_{mn}^l = (-1)^{m+n} \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_{mn}^l(\cos \vartheta) k_{mn}(0, \vartheta, 0, 0) d \cos \vartheta \quad \dots \dots \dots (4),$$

und i_{mj}^l durch

$$i_{mj}^l = (-1)^{j+m} \frac{2l+1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-ij\varphi} P_{mj}^l(\cos \vartheta) i_m(\varphi, \vartheta) d \cos \vartheta d\varphi \quad \dots \dots \dots (5)$$

gegeben sind. Mit i_m sind die Komponenten des Vektorfeldes i im komplexen sphärischen Koordinatensystem bezeichnet. Das Analoge gilt auch für die Komponenten j_m und k_{mn} . P_{mn}^l sind die generalisierten Kugelfunktionen [1].

Literatur

- [1] I. M. GELFAND, und Z. YA. ŠAPIRO, Uspehi mat. nauk 7 (1952), p. 3; Amer. math. Soc. Translations 2, (1956) p. 207 (§ 7.4, § 8.3).

Anschrift: M. RIBARIČ, Ljubljana, Njegoševa 6, Jugoslavija

*) J. Stefan Institut, Ljubljana, Yugoslavia.

Eine obere Schranke für die Frequenzen periodischer Lösungen von nichtlinearen Differentialgleichungen

Von P. SAGIROW

Viele Probleme der Regelungstechnik führen auf Gleichungen von folgendem Typ:

$$L(D)x = R(D)f(\lambda x + \mu \dot{x}), \quad \dot{x} = dx/dt \quad \dots \dots \dots (1).$$

Hier sind $L(D)$ und $R(D)$ Polynome in $D \equiv d/dt$ und $f(\lambda x + \mu \dot{x})$ bezeichnet eine Nichtlinearität, von der im folgenden angenommen wird, daß sie eindeutig, stetig, integrierbar und von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall ist. Der Grad l_2 von $R(D)$ ist immer kleiner als der Grad l_1 von $L(D)$; wir nehmen an, daß $l_1 \geq l_2 + 2$ ist.

Sucht man die periodische Lösung von (1) mit dem Ansatz

$$x = \frac{a_0}{2} + a \sin u + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n u + b_n \sin n u), \quad u = \omega t \quad \dots \quad (2),$$

so erhält man nach dem Einsetzen in (1) für die Bestimmung von ω , a_0 , a , a_n , b_n das unendliche Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} c a_0 &= A_0, & a V_1 &= A_1, & a U_1 &= B_1 \\ a_n U_n + b_n V_n &= A_n \\ -a_n V_n + b_n U_n &= B_n \end{aligned} \right\} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \dots \quad (3),$$

wo c eine Konstante, $U_n = U_n(\omega)$ und $V_n = V_n(\omega)$ Real- und Imaginärteil von $L(ni\omega)/R(ni\omega)$, A_n und B_n FOURIERKoeffizienten von $f(\lambda x + \mu \dot{x})$ sind:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda x(u) + \mu \omega x'(u)) \cos n u \, du, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda x(u) + \mu \omega x'(u)) \sin n u \, du, \end{aligned} \right\} \quad x' = \frac{dx}{du} \quad \dots \quad (4).$$

Das System (3) kann nur näherungsweise gelöst werden. Beschränkt man sich auf sinusähnliche Lösungen ($a_n = b_n = 0$ für $n \geq 2$), so erhält man die Näherung der harmonischen Balance (der Beschreibungsfunktion). Die Näherungswerte der Frequenz sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda V_1(\omega) - \mu \omega U_1(\omega) = 0 \quad \dots \quad (5).$$

Wir wollen zeigen, daß die strengen Werte der Frequenzen beliebiger (nicht nur sinusähnlicher!) periodischer Lösungen von (1) stets kleiner sind als die größte Wurzel von (5).

Dazu betrachten wir die Identität

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda x(u) + \mu \omega x'(u)) (\lambda x'(u) + \mu \omega x''(u)) \, du = 0 \quad \dots \quad (6).$$

Setzt man hier für $x'(u)$ und $x''(u)$ Reihen ein, die man aus (2) durch Differentiation nach u erhält, und integriert man dann die nun im Integranden von (6) stehenden unendlichen Summen gliedweise (was hier zulässig ist), so verwandelt sich die linke Seite von (6) in eine Linearkombination der FOURIERKoeffizienten A_n und B_n . Wenn man die A_n und B_n durch ihre Werte (4) ersetzt, erhält man endgültig

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2 (\lambda V_n - \mu n \omega U_n) = 0 \quad \dots \quad (7),$$

wo $c_1 = q$, $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ ist.

Da $n c_n^2$ für alle n positiv ist, darf die Klammer in (7) nicht vom konstantem Vorzeichen sein. Das würde aber sicher der Fall sein, falls ω größer als die größte Wurzel von (5) wäre. Damit ist gezeigt: Die Frequenzen sämtlicher periodischer Lösungen von (1) sind kleiner als die größte Wurzel von (5).

Neben dieser allgemeinen Aussage kann man aus (7) eine Reihe anderer Zusammenhänge gewinnen. Ist z. B. $R(D) = 1$ und $\lambda = 0$, $l_1 = 2$ oder $\mu = 0$, $l_1 = 3, 4$, so ist

$$\omega^2 = \omega_h^2 \frac{c_1^2 + 2^2 c_2^2 + 3^2 c_3^2 + \dots}{c_1^2 + 2^4 c_2^2 + 3^4 c_3^2 + \dots} \quad \dots \quad (8).$$

Es ist interessant, daß zwischen der Frequenz und den Amplituden der einzelnen Harmonischen für Gleichungen mit verschiedenen Nichtlinearitäten und vom verschiedenen Grad ein und dieselbe Beziehung (8) besteht.

Anschrift: Dr. P. SAGIROW, Denkendorf b. Eßlingen/N., Claudiusstr. 8

Die Regula Falsi für Operatoren in Banachräumen

Von JOCHEN W. SCHMIDT

Zur Bestimmung der Nullstellen eines nichtlinearen Operators F in einem BANACH-Raum B , also zur Lösung der nichtlinearen Aufgabe

$$Fx = 0 \quad \dots \dots \dots (1),$$

soll das Iterationsverfahren

$$Fx_n + \delta F(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (2)$$

betrachtet werden. Dabei sei $\delta F(u, v)$ bei festen u, v aus B ein linearer, beschränkter Operator, der sogenannte Differenzenquotientenoperator; über ihn wird anschließend Genaueres gesagt. Die Durchführung der Iteration erfordert somit, x_{n+1} jeweils aus der linearen Gleichung (2) zu bestimmen.

Ist F speziell eine Funktion einer reellen Veränderlichen ($B = R_1$), so stimmt (2) mit der bekannten Regula Falsi überein, wenn man für $\delta F(u, v)$ den Differenzenquotienten nimmt. Dieser ist im R_1 durch die Gleichung

$$Fu - Fv = \delta F(u, v)(u - v) \quad u, v \in B (= R_1) \quad \dots \dots \dots (3)$$

eindeutig festgelegt. Allgemein ist es jedoch nicht möglich, für Operatoren in beliebigen BANACH-Räumen durch (3) den zugehörigen Differenzenquotientenoperator zu definieren. Zum Beispiel liefert die Beziehung (3) im Falle $B = R_d$ nur d Gleichungen zur Ermittlung der d^2 Elemente der Matrix $\delta F(u, v)$.

Es wird daher so vorgegangen, daß man den linearen, beschränkten Operator $\delta F(u, v)$ durch eine individuelle Vorschrift in der Weise definiert, daß erstens die Gleichung (3) und zweitens die folgende einer LIPSCHITZ-Bedingung entsprechende Ungleichung gilt:

$$\|\delta F(u, v) - \delta F(v, w)\| \leq a \|u - w\| + b \|u - v\| + b \|v - w\| \quad \dots \dots \dots (4).$$

Von Bedeutung ist weiter die aus (3) und (4) unmittelbar folgende Ungleichung

$$\|Fu - Fv - \delta F(v, w)(u - v)\| \leq (a \|u - w\| + b \|u - v\| + b \|v - w\|) \|u - v\| \quad (5).$$

Die Frage nach der Existenz solcher Operatoren $\delta F(u, v)$ mit den Eigenschaften (3) und (4) wird durch Konstruktion beantwortet.

Es sei $B = R_d$ und $Fu = F(u_{(1)}, \dots, u_{(d)}) = (f_1(u_{(1)}, \dots, u_{(d)}), \dots, f_d(u_{(1)}, \dots, u_{(d)}))$ ein nichtlinearer Operator in R_d , genommen an der Stelle $u = (u_{(1)}, \dots, u_{(d)})$. Mit der Abkürzung

$$\delta F(u_{(1)}, \dots, u_{(j)} v_{(j)}, \dots, u_{(d)}) = \frac{1}{u_{(j)} - v_{(j)}} [F(u_{(1)}, \dots, u_{(j)}, \dots, u_{(d)}) - F(u_{(1)}, \dots, v_{(j)}, \dots, u_{(d)})]$$

(im Falle $u_{(j)} = v_{(j)}$ ersetzt man die rechte Seite durch den Grenzwert $v_{(j)} \rightarrow u_{(j)}$) gilt die Gleichung (3), wenn man als $\delta F(u, v)$ die Matrix

$$\delta F(u, v) = \left(\underbrace{\dots \delta F(v_{(1)}, \dots, v_{(j-1)}, u_{(j)} v_{(j)}, u_{(j+1)}, \dots, u_{(d)}) \dots}_{(j\text{-te Spalte})} \right) \quad \dots \dots \dots (6)$$

wählt. Auch die Ungleichung (4) kann man bestätigen. Die Zahlen a und b dort bestimmen sich aus Schranken für die zweiten partiellen Ableitungen von f_1, \dots, f_d oder aus Schranken für die zweiten Differenzenquotienten. Insbesondere ergibt sich, daß die Koeffizienten von $\|u - v\|$ und $\|v - w\|$ in (4) als gleich angenommen werden können.

Man kann zeigen: Das Verfahren (2) in R_d mit $\delta F(u, v)$ gemäß (6) hat den Konvergenzgrad $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,6 \dots$, wenn die Funktionalmatrix $F'(x)$ für die Nullstellen x von F nichtsingulär ist (im Falle R_1 siehe BACHMANN [1], WALL [4]).

Unter alleiniger Verwendung der Eigenschaften (3) und (4) läßt sich für das Iterationsverfahren (2) folgender Konvergenzsatz beweisen:

Satz: Auf einer Teilmenge D des BANACH-Raumes B sei der nichtlineare Operator F und ein zugehöriger Differenzenquotientenoperator δF erklärt. Es werde vorausgesetzt:

- 1) die Gleichung (3) und die Ungleichung (4) für $u, v, w \in D$,
- 2) zu $x_0, x_1 \in D$ existiert $(\delta F(x_1, x_0))^{-1}$ mit $\|(\delta F(x_1, x_0))^{-1}\| \leq t_1$,
- 3) $s_1 = t_1 (a \|x_2 - x_0\| + b \|x_2 - x_1\| + b \|x_1 - x_0\|) \leq 0,3$ und $2 \|x_2 - x_1\| \leq \|x_2 - x_0\|$,
- 4) $K = \left\{ y \in B; \|y - x_2\| \leq \frac{s_1}{1 - s_1} \frac{1 - 2s_1}{1 - 3s_1} \|x_2 - x_1\| \right\}$ ist in D enthalten.

Dann wird die Folge $\{x_n\}$ durch die Vorschrift (2) eindeutig festgelegt, sie ist konvergent, und ihr Grenzwert x stellt eine Nullstelle von F dar. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x - x_n\| \leq \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{s_\nu}{1 - s_\nu} \right) \frac{1 - 2s_1}{1 - 3s_1} \|x_2 - x_1\| \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Die s_n sind dabei erklärt durch

$$s_2 = \frac{s_1}{1 - s_1}, \quad s_n = \frac{s_{n-1}}{1 - s_{n-1}} \frac{s_{n-2}}{1 - s_{n-2}} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Der Satz wurde in Anlehnung an die Aussagen über das NEWTONsche Verfahren formuliert (siehe vor allem KANTOROWITSCH [2], SCHRÖDER [3]). Von den Voraussetzungen ist die unter 3) genannte, $s_1 \leq 3/10$, die entscheidende; für hinreichend kleine $\|x_2 - x_0\|$, $\|x_2 - x_1\|$, $\|x_1 - x_0\|$ läßt sie sich stets erfüllen. Sollte die Forderung $2\|x_2 - x_1\| \leq \|x_2 - x_0\|$ nicht gelten, so bleibt der Satz trotzdem mit etwas abgewandeltem s_1 bestehen.

Im Raum R_d läßt sich eine weitere Verallgemeinerung der Regula Falsi angeben, welche die gleichen Konvergenzeigenschaften wie das Verfahren (2), (6) hat. Mit der Matrix

$$\Delta F(u, v) = \left(\dots \underbrace{\delta F(u_{(1)}, \dots, u_{(j-1)}, u_{(j)}, u_{(j+1)}, \dots, u_{(d)})}_{(j\text{-te Spalte})} \dots \right) \quad (7)$$

lautet sie analog zu (2)

$$F x_n + \Delta F(x_n, x_{n-1}) (x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

(zu dieser Verallgemeinerung in den R_d siehe auch WOLFE [5]; diese Arbeit wurde dem Verfasser erst nach Herstellung des Manuskripts bekannt, konnte aber noch nicht eingesehen werden).

Der Konvergenzsatz zu dieser Iteration, der lediglich eine Übertragung des vorherigen bedeutet, basiert auf (4) und (5) entsprechenden Ungleichungen.

Zur Erläuterung des Konvergenzverhaltens sei ein Beispiel beigelegt, das nach der Vorschrift (7), (8) durchgerechnet wurde.

Die Aufgabe, die Wurzelfunktion im Intervall $[1/16, 16]$ durch eine gebrochen lineare Funktion relativ im TSCHEBYSCHEFFschen Sinne zu approximieren, führt auf das folgende nicht-lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_{(1)}, x_{(2)}) &= \frac{z(r + x_{(2)}) - x_{(1)}}{\sqrt{r}(r + x_{(2)})} - \frac{1}{4} \frac{z(16 + x_{(2)}) - x_{(1)}}{16 + x_{(2)}} = 0 \\ f_2(x_{(1)}, x_{(2)}) &= \frac{z(s + x_{(2)}) - x_{(1)}}{\sqrt{s}(s + x_{(1)})} - 4 \frac{z(x_{(2)} + 1/16) - x_{(1)}}{x_{(2)} + 1/16} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9),$$

mit

$$\begin{aligned} z &= z(x_{(1)}, x_{(2)}) = \frac{1}{17} \left(8 + \frac{x_{(1)}}{16 + x_{(2)}} + \frac{16 x_{(1)}}{x_{(2)} + 1/16} \right), \\ r &= r(x_{(1)}, x_{(2)}) = \frac{3 x_{(2)}}{2 z} - x_{(2)} - \sqrt{\left(\frac{3 x_{(1)}}{2 z} \right)^2 - \frac{2 x_{(1)} x_{(2)}}{z}}, \\ s &= s(x_{(1)}, x_{(2)}) = \frac{3 x_{(1)}}{2 z} - x_{(2)} + \sqrt{\left(\frac{3 x_{(1)}}{2 z} \right)^2 - \frac{2 x_{(1)} x_{(2)}}{z}}. \end{aligned}$$

Beginnend mit vorgegebenen Anfangswerten $x_0 = (x_{0(1)}, x_{0(2)})$ und $x_1 = (x_{1(1)}, x_{1(2)})$ gewinnt man folgende Näherungswerte für eine Lösung von (9)

| n | $x_{n(1)}$ | $x_{n(2)}$ |
|-----|------------------------|------------------------|
| 0 | 19,2 | 4,5 |
| 1 | 19,3 | 4,6 |
| 2 | 19,24405 73527 64191 7 | 4,51312 41974 31570 75 |
| 3 | 19,25427 75753 41985 2 | 4,51432 76465 14537 20 |
| 4 | 19,25468 86205 44540 3 | 4,51437 00216 10436 72 |
| 5 | 19,25468 80185 22130 0 | 4,51436 99344 96460 97 |
| 6 | 19,25468 80185 60080 5 | 4,51436 99345 01809 97 |
| 7 | 19,25468 80185 60080 4 | 4,51436 99345 01809 92 |
| 8 | 19,25468 80185 60080 1 | 4,51436 99345 01809 90 |
| 9 | 19,25468 80185 60080 0 | 4,51436 99345 01809 92 |

Die Iteration „steht“ also nach fünf Schritten, wenn man die letzten beiden Ziffern infolge der Rundungsfehler als unsicher betrachtet.

Über die Iterationsverfahren soll in Kürze ausführlicher berichtet werden.

Literatur

- [1] K.-H. BACHMANN, Der Konvergenzgrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation, ZAMM **34** (1954), S. 282—283.
- [2] L. W. KANTOROWITSCH, Funktionalanalysis und angewandte Mathematik (russ.), Uspechi Mat. Nauk, N.S. **3** (1948), S. 89—185.
- [3] J. SCHRÖDER, Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung, Arch. Math. **7** (1956), S. 471—484.
- [4] D. D. WALL, The Order of an Iteration Formula, Math. Tables other Aids Comput. **10** (1956).
- [5] P. WOLFE, The Secant Method for Simultaneous Nonlinear Equations, Comm. of the ACM **2** (1959), S. 12—13.

Anschrift: Dr. JOCHEN W. SCHMIDT, Dresden A 27, Liebigstr. 24

Ein Verfahren zur genäherten Tschebyscheff-Approximation durch Polynome

Von A. SCHUBERT

Die zu approximierende Funktion $f(x)$ besitze im abgeschlossenen Intervall $[-1, +1]$ Ableitungen beliebiger Ordnung. Es wird die Aufgabe betrachtet, dasjenige Polynom $P_n(x)$ zu bestimmen, das in den Extremstellen $x_j^{(n)}$ des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x)$ (einschließlich $+1$ und -1) von $f(x)$ betragsgleiche Abweichungen alternierenden Vorzeichens, $\pm d^{(n)}$, ergibt:

$$P_n(x_j^{(n)}) - f(x_j^{(n)}) = (-1)^{j+1} d^{(n)}, \quad x_j^{(n)} = \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1).$$

Mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x^k, \quad f(x_j^{(n)}) = f_j^{(n)}$$

lautet das Gleichungssystem für die $a_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) und $d^{(n)}$:

$$\sum_{k=0}^n a_k^{(n)} x_j^{(n)k} + (-1)^j d^{(n)} = f_j^{(n)}, \quad \text{kurz} \quad \mathfrak{R}^{(n)} a^{(n)} = f^{(n)} \quad \dots \dots \dots (1). \\ (j = 0, 1, \dots, n+1)$$

Die Lösung von (1) läßt sich mittels zweier Matrizen $\mathfrak{S}^{(n)} = (s_{ij}^{(n)})$ und $\mathfrak{U}^{(n)} = (u_{hi}^{(n)})$ direkt angeben:

$$a^{(n)} = \mathfrak{U}^{(n)} \mathfrak{S}^{(n)} f^{(n)}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{R}^{(n)-1} = \mathfrak{U}^{(n)} \mathfrak{S}^{(n)} \quad \dots \dots \dots (2).$$

Dabei ist

$$s_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } j = 0 \\ \cos \frac{j\pi}{n+1} & \text{für } j = 1, 2, \dots, n \quad (i = 0, 1, \dots, n+1) \\ \frac{(-1)^i}{2} & \text{für } j = n+1 \end{cases}$$

$$u_{hi}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{für } h+i \text{ ungerade und} \\ \text{für } h+i \text{ gerade, falls } h > i \end{array} \right. \\ \frac{2^h}{n+1} & \text{für } h = i \\ \left[\binom{-h-1}{i'} - \binom{-h-1}{i'-1} \right] \frac{2^h}{n+1} & \text{für } h+i \text{ gerade, falls } h < i, \\ & \text{d. h. } i' = \frac{i-h}{2} > 0 \\ 0 & \text{für } h \neq n+1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{für } h = n+1 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \frac{2^h}{n+1} \\ \left[\binom{-h-1}{i'} - \binom{-h-1}{i'-1} \right] \frac{2^h}{n+1} \\ 0 \\ \frac{1}{n+1} \end{matrix}} \right\} i \neq n+1$$

$$(h, i = 0, 1, \dots, n+1).$$

Die Kenngröße $d^{(n)}$, die einen i. a. mit wachsendem n immer besseren Anhaltspunkt für die Güte der Approximation liefert, errechnet sich sehr einfach zu

$$d^{(n)} = \frac{1}{n+1} \left[\frac{1}{2} f_0^{(n)} + \sum_{j=1}^n (-1)^j f_j^{(n)} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} f_{n+1}^{(n)} \right] \quad (3).$$

(Falls $f(x)$ gerade bzw. ungerade ist, ist n ungerade bzw. gerade zu wählen, da sonst $d^{(n)} = 0$ erhalten wird; die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ der ungeraden bzw. geraden Potenzen werden zufolge (1) selbstverständlich Null.)

Wird nun andererseits dasjenige Polynom $Q_{n+1}(x)$ gesucht, das für $x = x_j^{(n)}$ ($j = 0, 1, \dots, n+1$) mit $f(x)$ übereinstimmt, d. h.

$$Q_{n+1}(x_j^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k^{(n+1)} x_j^{(n)k} = f_j^{(n)} \quad (4),$$

so liefert die Newtonsche Interpolationsformel für den Koeffizienten von x^{n+1} :

$$c_{n+1}^{(n+1)} = [x_{n+1}^{(n)} x_n^{(n)} \dots x_1^{(n)} x_0^{(n)}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad -1 < \xi < 1.$$

Damit wird

$$Q_{n+1}(x) - \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{2^n} T_{n+1}(x) = \varphi_n(x) \quad (x^{n+1} \text{ hat in } T_{n+1} \text{ den Faktor } 2^n)$$

ein Polynom n -ten Grades, und es gilt

$$Q_{n+1}(x_j^{(n)}) = \varphi_n(x_j^{(n)}) + (-1)^j \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{2^n} = f_j^{(n)} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1).$$

Vergleich mit (1) liefert sofort

$$\varphi_n(x) = P_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{c_{n+1}^{(n+1)}}{2^n} = d^{(n)},$$

also schließlich

$$d^{(n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2^n (n+1)!}, \quad -1 < \xi < 1 \quad (5).$$

Der Betrag des Fehlers, für dessen Maximum $|d^{(n)}|$ eine untere Schranke liefert, kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq |P_n(x) - Q_{n+1}(x)| + |Q_{n+1}(x) - f(x)| \leq |d^{(n)}| + |R_{n+2}(x)|.$$

Mit

$$R_{n+2}(x) = \frac{f^{(n+2)}(\tilde{\xi})}{(n+2)!} \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_j^{(n)}) \quad \text{und} \quad |R_{n+2}(x)| \leq \frac{|f^{(n+2)}(\tilde{\xi})|}{2^n (n+2)!}, \quad -1 < \tilde{\xi} < 1$$

ergibt sich unter Beachtung von (5)¹⁾:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq |d^{(n)}| + \frac{|f^{(n+2)}(\tilde{\xi})|}{2^n (n+2)!} \approx |d^{(n)}| + 2|d^{(n+1)}| = \tilde{d}^{(n)} \quad (6).$$

Ist also für $f(x)$ in $[-1, +1]$ ein Approximationspolynom gesucht, dessen Abweichung von $f(x)$ dem Betrage nach kleiner als d ist, so ist die Folge der $d^{(n)}$ (beginnend mit einem geeigneten n_0) nach (3) zu berechnen, bis $\tilde{d}^{(n)} < d$ wird. Erst dann werden die Koeffizienten $a_k^{(n)}$ von $P_n(x)$ nach (2) ermittelt.

Beispiele

| | n | $d^{(n)}$ | $ P_n - f _{\max}$ | $ d^{(n)} + 2 d^{(n+1)} $ |
|--|-----|-------------|--------------------|----------------------------|
| 1. $f(x) = e^x$ | 3 | 0,0054 742 | 0,0055 811 | 0,0065 600 |
| | 4 | 0,0005 429 | 0,0005 500 | 0,0006 329 |
| | 5 | 0,0000 450 | 0,0000 455 | 0,0000 516 |
| 2. $f(x) = J_0 \left[\frac{5}{2} (x+1) \right]$ | 4 | -0,0099 800 | 0,0107 176 | 0,0136 086 |
| | 5 | 0,0018 143 | 0,0019 305 | 0,0024 615 |
| | 6 | 0,0003 236 | 0,0003 391 | 0,0004 204 |

Anschrift: Dipl.-Ing. ANDREAS SCHUBERT, Dresden-A 20, Thomas-Mann-Str. 24

¹⁾ Falls $f(x)$ gerade oder ungerade ist, wird $|d^{(n+1)}|$ durch $\sqrt{|d^{(n)} d^{(n+2)}|}$ ersetzt.

Eine Fehlerschätzung für das gewöhnliche Differenzenverfahren bei der Poissonschen Differentialgleichung

Von WERNER UHLMANN*)

Der Inhalt des Vortrages wird zusammen mit anderen Ergebnissen unter dem Titel „Über harmonische und isotrope stochastische Prozesse mit Fehlerschätzung für ein Differenzenverfahren“ noch in diesem Jahrgang der ZAMM veröffentlicht.

Anschrift: Dr. WERNER UHLMANN, Hamburg 1, Langereihe 27

*) Institut für Versicherungsmathematik und mathematische Statistik der Universität Hamburg.

Über die Tschebyscheff-Approximation differenzierbarer Funktionen

Von WOLFGANG WALTER*)

Wir betrachten die folgende TSCHEBYSCHEFFSche Approximationsaufgabe: Gegeben ist eine in einem abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ stetige, im offenen Intervall $a < x < b$ differenzierbare Funktion $f(x)$ und eine natürliche Zahl n ; gesucht ist ein Polynom $P_n(x)$ von höchstens n -tem Grade, das eine beste Approximation von $f(x)$ in dem Sinne darstellt, daß die Größe

$$\lambda = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)| \quad \dots \quad (1)$$

möglichst klein wird. Die Lösung $P_n(x)$ ist bekanntlich eindeutig bestimmt und wird dadurch charakterisiert, daß die Fehlerkurve

$$R(x) = f(x) - P_n(x) \quad \dots \quad (2)$$

das Maximum ihres Betrages λ_T in mindestens $n + 2$ aufeinanderfolgenden Punkten mit abwechselndem Vorzeichen annimmt.

Als „Normalfall“ bezeichnen wir den Fall, daß die Funktion $R(x)$ in genau $n + 2$ Punkten den Wert $\pm \lambda_T$ (abwechselnd $+$ und $-$) annimmt und daß die Endpunkte a und b in diesen $n + 2$ Punkten enthalten sind. Er liegt z. B. vor, wenn die $(n + 1)$ -te Ableitung von f in (a, b) ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Der Grundgedanke des nun zu beschreibenden Verfahrens zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, nicht das Polynom $P_n(x)$, sondern das Polynom

$$Q_n(x) = P_n(x) + \lambda_T \quad \dots \quad (3)$$

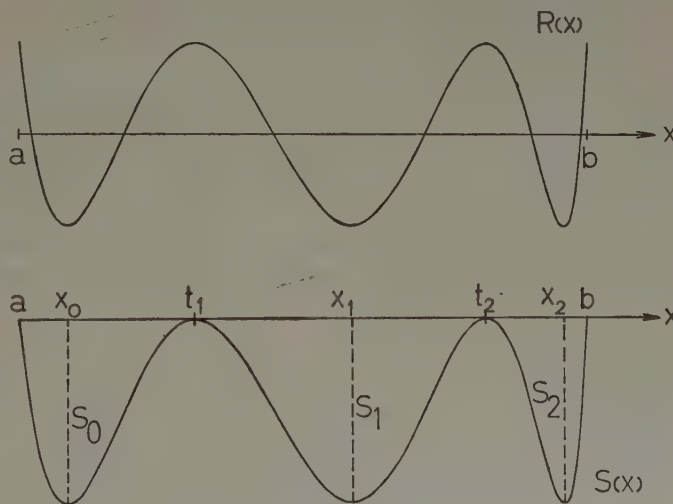
zu berechnen. Wir behandeln im folgenden den Normalfall für ungerades $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$). Die Fehlerkurve

$$S(x) = f(x) - Q_n(x) = R(x) - \lambda_T \quad (4)$$

hat einerlei Vorzeichen und die Eigenschaft, daß für gewisse Punkte $a < t_1 < t_2 < \dots < t_k < b$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= Q_n(x), \quad \text{für } x = a, b, \\ f(x) &= Q_n(x), \\ f'(x) &= Q'_n(x), \end{aligned} \right\} \text{für } x = t_1, \dots, t_k \quad (5)$$

ist. Sind die t_i bekannt, so läßt sich das Polynom $Q_n(x)$ leicht bestimmen; es ist die Lösung der Interpolationsaufgabe (5) und kann z. B. mit Hilfe eines Schemas dividierter Differenzen berechnet werden. Gibt man umgekehrt die Punkte \bar{t}_i ($a < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_k < b$) beliebig vor und



Fehlerkurven $R(x)$ und $S(x)$ für $n = 5$ (Normalfall)

*) Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

berechnet das nach (5) dazugehörige Interpolationspolynom $\bar{Q}_n(x)$, so wird die Fehlerkurve $\bar{S}(x) = f(x) - \bar{Q}_n(x)$ (unter geeigneten Voraussetzungen über $f(x)$, etwa wenn $f^{(n+1)} \geq 0$ oder ≤ 0 ist) qualitativ dasselbe Aussehen haben wie $S(x)$, d. h. $\bar{S}(x)$ wird das Vorzeichen nicht wechseln und zwischen je 2 benachbarten der Punkte a, t_1, \dots, t_k, b genau ein Extremum besitzen. Diese Extremstellen seien, von links nach rechts durchnummeriert, $(x_0, S_0), \dots, (x_k, S_k)$. Die Aufgabe besteht darin, die $\bar{t}_i = t_i$ so zu wählen, daß alle S_i ($i = 0, \dots, k$) gleich werden.

In Formeln: Ist

$$T = (t_1, \dots, t_k)_{sp}, \quad D = (S_1 - S_0, S_2 - S_0, \dots, S_k - S_0)_{sp}$$

(dabei soll es sich, was durch den Index sp angedeutet ist, um Spaltenvektoren handeln), so ist eine Nullstelle T von D gesucht,

$$D(T) = 0 \quad \dots \dots \dots (6).$$

Bei dieser neuen Formulierung der TSCHEBYSCHEFF-Aufgabe wird ein wesentlicher Vorteil erzielt.

Die Zahl der Unbekannten beträgt nur noch $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Mit anderen Worten: während bei der ursprünglichen Fehlerkurve dafür gesorgt werden muß, daß alle $k + 2$ Maxima und alle $k + 1$ Minima sich „auf gleicher Höhe“ befinden, wird durch die gemäß (3) geänderte Fragestellung und die Interpolation nach (5) dafür gesorgt, daß die Hälfte dieser Bedingungen automatisch erfüllt ist.

Zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion $D(T)$ können verschiedene Wege eingeschlagen werden. Eine Möglichkeit, die praktisch erprobt wurde und sich gut bewährt hat, besteht darin, das NEWTON-Verfahren

$$D(T_p) + \frac{\partial D(T_p)}{\partial T} (T_{p+1} - T_p) = 0 \quad \dots \dots \dots (7)$$

heranzuziehen. Dabei ist $\partial D / \partial T$ die $k \times k$ -Matrix der partiellen Ableitungen von D nach den t_i , welche bei jedem Schritt berechnet werden muß. (Benutzt man das sog. „vereinfachte NEWTON-Verfahren“, so genügt eine einmalige Berechnung.) Dieses Verfahren ist nur dann durchführbar, wenn auch f'' in $a < x < b$ existiert. Die partiellen Ableitungen von D lassen sich aus dem Schema der dividierten Differenzen mit geringem zusätzlichen Rechenaufwand entnehmen.

Bei Anwendung dieser Methode gliedert sich ein Iterationsschritt in folgende Einzelprobleme

- (a) Bestimmung von \bar{Q}_n bei gegebenem $\bar{T} = T_p$;
- (b) Bestimmung der Extrema $\bar{S}_0, \dots, \bar{S}_k$;
- (c) Bestimmung der Matrix $\partial D / \partial T$;
- (d) Berechnung von T_{p+1} nach (7).

Der Teil (b) benötigt bei Verwendung elektronischer Rechenmaschinen verhältnismäßig viel Zeit. Hier zeigt sich ein weiterer Vorteil unseres Verfahrens. Während $R(x)$ $n + 2$ Extrema besitzt (welche bei gut konvergenten Verfahren auch aufgesucht werden müssen), sind es hier nur $(n + 1)/2$ Stück. Die Gleichungsauflösung in (d) ist in praktischen Fällen leicht zu bewältigen; man beachte, daß für $n = 5$ bzw. 7 die Matrix nur 2 bzw. 3 Zeilen hat.

Das Verfahren wurde bisher für ungerades $n \leq 7$ an einer Reihe von Funktionen erprobt. Im Vortrag wurden 9 Dias gezeigt, welche die Wirkungsweise des Verfahrens an drei Beispielen

$$1) e^x \text{ für } -10 \leq x \leq 10, \quad 2) \sqrt[4]{x} \text{ für } 0 \leq x \leq 1, \quad 3) \frac{1}{0,01 + x} \text{ für } 0 \leq x \leq 1,$$

jeweils für $n = 3, 5$ und 7 veranschaulichen. Diese Beispiele sind in gewissem Sinne pathologisch; die Ausgangsnäherung (bei ihr wurden die Stützstellen t_i so gelegt, wie es das entsprechende TSCHEBYSCHEFF-Polynom vorschreibt) ist sehr schlecht. Die endgültige Gestalt der Fehlerkurve wurde nach 4 bis 6 Iterationen erreicht.

Es ist selbstverständlich, daß das Verfahren (mit geringen Modifikationen) auch für gerades n anwendbar ist. Ebenso läßt es sich ohne Mühe auf allgemeinere Approximationsaufgaben anwenden, etwa auf die TSCHEBYSCHEFF-Approximation mit der Forderung, daß der relative Fehler möglichst klein werden soll. Eine ausführliche Darstellung und numerische Ergebnisse werden an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Bemerkungen zur Tschebyscheffschen Approximation mit rationalen Funktionen^{*)}

Von HELMUT WERNER

Soll eine Funktion $f(x)$, stetig im Intervall $[a, b]$, durch eine Funktion aus einer Klasse \mathfrak{R} stetiger Funktionen im Sinne von TSCHEBYSCHEFF approximiert werden, so meint man damit bekanntlich folgendes: Definiert man die Norm für stetige Funktionen in $[a, b]$ durch

$$\|u\| = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|,$$

so ist eine Funktion $g_0(x) \in \mathfrak{R}$ so zu bestimmen, daß gilt:

$$\|f - g_0\| \leq \|f - g\| \quad \text{für alle } g \in \mathfrak{R}.$$

Für die Anwendungen auf elektronischen Rechenmaschinen sind Klassen solcher Funktionen wichtig, die mit einer kleinen Anzahl arithmetischer Operationen berechnet werden können, also Polynome und rationale Funktionen. Man verfügt über gute Verfahren zur Berechnung der TSCHEBYSCHEFF-Approximierenden in Polynomform, man vergleiche etwa [6]. Für den Fall rationaler Funktionen gibt es einige Ansätze [3], [4], sowie die soeben erschienene Arbeit von CHENEY und LOEB [2]. Wir wollen hier Formeln angeben, die die formale Übertragung des zweiten REMES-Algorithmus [5] darstellen und mit denen man im allgemeinen die rationalen TSCHEBYSCHEFF-Approximierenden iterativ berechnen kann. Es gibt jedoch Ausnahmefälle, in denen das Verfahren versagt. Dies liegt im wesentlichen daran, daß die TSCHEBYSCHEFF-Approximierende im rationalen Falle nicht so einfach zu klassifizieren ist wie bei Polynomen [1, S. 55]. Der Regelfall ist aber der, daß bei einer Approximation mit Funktionen aus der Klasse

$$\mathfrak{R}(l, m) = \left\{ Q(x) \mid Q(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p \text{ und } q \text{ Polynome; Grad } p \leq l; \text{ Grad } q \leq m \right\}$$

die Fehlerkurve $\varepsilon(x) = f(x) - Q(x)$ für die TSCHEBYSCHEFF-Approximierende an $N + 2$ Punkten ($N = l + m$) in $[a, b]$ Extrema gleichen Absolutbetrags und alternierenden Vorzeichens besitzt. In Verallgemeinerung des REMES-Algorithmus kann man nun so vorgehen:

1. Aufstellen einer Anfangsapproximierenden $Q_1(x)$. Die zugehörige Fehlerkurve ε_1 soll wenigstens $N + 2$ Extrema alternierenden Vorzeichens haben. Eine Folge von Abszissen solcher Extremwerte und der zugehörigen Werte der zu approximierenden Funktion sei

$$(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_{N+1}, f_{N+1})$$

mit $x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1}$.

2. Konstruktion einer in $[a, b]$ regulären Funktion $Q_2(x)$, für welche die Fehlerkurve in den obigen Extrempunkten überall absolut gleich ist („Glätten der obigen Fehlerkurve“).

Die Extrema von $\varepsilon_2 = f(x) - Q_2(x)$ werden im allgemeinen etwas von den Extrema von ε_1 abweichen.

Man kann nun $Q_2(x)$ wieder als Anfangsapproximierende betrachten und das Verfahren wiederholen.

Zur Konstruktion von $Q_2(x)$ berechnet man zunächst η aus

$$\begin{vmatrix} x_0^m h_0 & \dots & x_0 h_0 & h_0 & x_0^l & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{N+1}^m h_{N+1} & \dots & x_{N+1} h_{N+1} & h_{N+1} & x_{N+1}^l & \dots & x_{N+1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

mit $h_i = f_i + (-1)^i \cdot \eta$.

Dies ist eine Gleichung $(m + 1)$ ten Grades in η . Unter den Wurzeln gibt es höchstens eine, für die $Q_2(x)$, definiert durch

$$\begin{vmatrix} x^m Q_2(x) & \dots & x Q_2(x) & Q_2(x) & x^l & \dots & x & 1 \\ x_0^m h_0 & \dots & x_0 h_0 & h_0 & x_0^l & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_N^m h_N & \dots & x_N h_N & h_N & x_N^l & \dots & x_N & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

in $[a, b]$ stetig ist und die Werte $f_i \pm \eta$ in x_i annimmt. Für die praktischen Zwecke der Berechnung wird man diese Formeln in anderer Form schreiben. Auch wird man versuchen, die Entscheidung der Stetigkeit zu treffen, ohne $Q_2(x)$ explizit auszurechnen. Auf mögliche Schwierig-

^{*)} Diese Mitteilung wurde angefertigt im AEG-Forschungsinstitut, Frankfurt/M.

keiten soll hier nicht eingegangen werden. Es soll dies vielmehr nur als ein Entwurf dafür dienen, wie man einen solchen Algorithmus aufbauen kann.

Für $\mathcal{R}(1,1)$ kann man die in Verbindung mit 2. auftretenden Fragen durch die folgende Aussage vollständig erledigen.

Sind die Punkte und Funktionswerte (x_i, f_i) gegeben, $i = 0, 1, 2, 3$ und ist $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, so kann man genau dann eine in $[x_0, x_3]$ stetig gebrochen lineare Funktion finden, die durch $(x_i, f_i + (-1)^i \eta)$ geht, wenn gilt¹⁾

$$\operatorname{sgn}(f_0 - f_2) = \operatorname{sgn}(f_1 - f_3).$$

Man hat zu wählen:

$$\eta = \frac{1}{4} \mu_1 + \frac{1}{4} \mu_2 \cdot \operatorname{sgn}(f_0 - f_2),$$

$$\mu_1 = f_3 - f_2 + f_1 - f_0,$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)(f_0 - f_2 + f_1 - f_3)^2 + (x_0 - x_3)(x_1 - x_2)(f_0 - f_2 - f_1 + f_3)^2}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_3)} \right\}^{1/2}.$$

Der oben angegebene Zyklus ist in diesem Falle leicht durchzuführen. Die Konvergenz war in allen auf einer elektronischen Rechenmaschine im AEG-Forschungsinstitut durchgeführten Beispielen sehr gut. Außerdem kann man das Verfahren leicht so gestalten, daß für die TSCHEBYSCHJEFF-Approximation die Norm

$$\max_{a \leq x \leq b} |u(x)| \cdot w(x)$$

mit einer positiven Gewichtsfunktion $w(x)$ zugrundegelegt wird.

Dies erbrachte z. B., auf die Funktion $\operatorname{tg} x$ in $[-1, +1]$ angewendet, eine Approximation in der Form

$$\operatorname{tg} x = x \frac{0,319\,6994 - 0,022\,4795 \cdot x^2}{0,319\,6656 - 0,128\,8207 \cdot x^2} + \varepsilon(x)$$

mit $|\varepsilon(x)| < 2 \cdot 10^{-5}$, während man durch TSCHEBYSCHJEFF-Approximation mit einem Polynom $x \cdot \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cdot x^{2\nu}$ für $n = 3$ nur $3,4 \cdot 10^{-4}$, mit $n = 4$ nur $4,4 \cdot 10^{-5}$ für das gleiche Intervall erreicht.

Literatur

- [1] N. I. ACHLESER, Vorlesungen über Approximationstheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1953.
- [2] E. W. CHENEY and H. L. LOEB, Two New Algorithms for Rational Approximations, Num. Math. 3 (1961), S. 72—75.
- [3] H. J. MAEHLY, Methods for Fitting Rational Approximations, Pt. I: Telescoping Procedures for Continued Fractions, J. Assoc. Comp. Mach. 7 (1960).
- [4] H. J. MAEHLY und CH. WITZGALL, Tschebyscheff-Approximationen in kleinen Intervallen. I. Approximation durch Polynome, Num. Math. 2 (1960), S. 142—150; II. Stetigkeitssätze für gebrochen rationale Approximationen, Num. Math. 2 (1960), S. 293—307.
- [5] E. REMES, Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebycheff, C. R. Acad. Sci. Paris 199 (1934), p. 337—340.
- [6] E. STIEFEL, Über diskrete und lineare Tchebycheff-Approximationen, Num. Math. 1 (1959), S. 1—28.

Anschrift: Dr. HELMUT WERNER, Inst. für Angew. Mathematik, Univ. Hamburg, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67

¹⁾ $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Zur Anwendung des Newtonschen Iterationsverfahrens bei der numerischen Behandlung der Tschebyscheff-Approximation

Von W. WETTERLING

Die Aufgabe, eine gegebene Funktion im TSCHEBYSCHJEFFschen Sinn durch eine von n Parametern abhängende Funktion zu approximieren, kann als nichtlineares Gleichungssystem für die Parameter geschrieben werden, wenn die Lösung der Aufgabe eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, daß die Defektfunktion in $n + 1$ Punkten Extrema gleichen Betrages besitzt. Wenn eine, etwa durch Interpolation gewonnene, Näherungslösung dieses Systems bekannt ist, kann sie nach dem NEWTONschen Verfahren iterativ verbessert werden. Die Konvergenz der Methode wird an Hand allgemeiner Ergebnisse über das NEWTONsche Iterationsverfahren für Operatorgleichungen in BANACH-Räumen diskutiert. Eine ausführliche Darstellung erscheint in der Zeitschrift „Mathematik, Technik, Wirtschaft (MTW)“ (Wien).

Anschrift: Dr. rer. nat. WOLFGANG WETTERLING, Hamburg-Altona, Arnoldstr. 74

B. RECHENMASCHINEN

Rundefehler bei der Lösung linearer Gleichungen

Von H. EHLICH und K. ZELLER

Wir betrachten lineare Gleichungen $AX = B$, wo A quadratisch n -reihig nichtsingulär ist und B aus einer oder mehreren Spalten besteht. Das übliche Eliminationsverfahren zur Lösung von $AX = B$ beruht auf der Zerlegung $A = LR$, wo L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale und R eine obere Dreiecksmatrix ist. Umordnungen, die hierbei nötig oder zweckmäßig sind, denken wir uns von vornherein bei A ausgeführt.

Die Zerlegung $A = LR$ gewinnt man durch direkten Ansatz oder aber durch schrittweise Elimination:

$$\text{wo} \quad A_1 = A, \quad A_2 = C_1 A_1, \dots, \quad A_n = C_{n-1} A_{n-1}, \quad R = A_n,$$

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ 0 & -e_{k+1,k} & & \ddots & \\ & \vdots & & & \\ & -e_{n,k} & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ 0 & e_{k+1,k} & & \ddots & \\ & \vdots & & & \\ & e_{n,k} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Jedes C_k sorgt dafür, daß in A_{k+1} die k -te Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält. Es gilt $L = C^{-1} = C_1^{-1} \dots C_{n-1}^{-1}$. Letzteres Produkt ist so beschaffen, daß einfach die Außerdiagonalelemente aufzusummieren sind (vgl. die Überlegungen bei den unten genannten E_k). Daher treten in den C_k die l_{ij} aus L auf.

Bei der Rechnung pflanzen sich Rundefehler im allgemeinen nichtlinear fort. Zwar sind die Fehler meist so klein, daß man linearisieren darf (vgl. BLANC [4], WILLERS [5]), jedoch gibt es hier einen eleganteren Weg, die Nichtlinearität weitgehend auszuschalten: Man denkt sich an den Ausgangskoeffizienten Korrekturen angebracht und stellt damit fest, welche Gleichung $A^* X^* = B^*$ man tatsächlich löst. So ging WILKINSON [2] vor, vgl. auch v. NEUMANN-GOLDSTINE [1]. Wir stellen die Methode allgemeiner dar und verschärfen dabei eine von JÖRGENS [3] gewonnene Fehlerabschätzung für numerische Inverse.

Wir behandeln zuerst die schrittweise Elimination. Wegen der Rundefehler erhält man statt der A_k gewisse A_k^* nach der Rekursionsformel $A_{k+1}^* = A_k^* C_k^* + E_k$, wo die Fehlermatrix E_k von der Gestalt

$$E_k = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & e_{k+1,k} & \dots & e_{k+1,n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ & e_{n,k} & \dots & e_{n,n} \end{pmatrix}$$

ist. Dabei unterscheiden sich die nichttrivialen Elemente der k -ten Spalten ihrer Herkunft nach etwas von den übrigen: Sie geben an, wie stark die entsprechenden Elemente in $C_k^* A_k^*$ von Null abweichen. Von den Sonderfällen, wo Rundefehler die numerische Lösung verhindern, sehen wir ab.

Weil E_k bis zur k -ten Zeile nur Nullen enthält, gilt $C_m^* E_k = E_k$ für $m = 1, \dots, k$ und damit

$$R^* = C^* (A + E) \quad \text{mit} \quad E = E_1 + \dots + E_{n-1}.$$

Wir haben also statt A die Matrix $A^* = A + E$ zerlegt.

Wird die rechte Seite B mitbehandelt, so ergibt sich für diese eine entsprechende Fehlermatrix $F = F_1 + \dots + F_{n-1}$, wo aber die F_k im allgemeinen keine Nullspalten besitzen. Bei direktem Ansatz $A = LR$ erhält man E und F unmittelbar.

Das auf beiden Wegen entstehende dreieckige Gleichungssystem wird auch nur bis auf einen gewissen Fehler G befriedigt (dabei läßt sich auch das GAUSS-JORDANSche Verfahren behandeln), so daß wir schließlich ein X^* mit

$$C^* (A + E) X^* = C^* (B + F) + G, \quad \text{also} \quad (A + E) X^* = B + F + L^* G$$

oder

$$A X^* = B - D \quad \dots \dots \dots (1)$$

mit

$$D = E X^* - F - L^* G \quad \dots \dots \dots (2)$$

bekommen.

Der Unterschied zwischen wahrer und berechneter Lösung ist $X - X^* = A^{-1} D$. Unter Verwendung geeigneter Matrix- bzw. Vektornormen erhalten wir somit als Fehlermaß

$$\|X - X^*\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|D\|$$

Als Normen kommen u. a. in Frage

$$\|Z\| = \max_j \sum_i |z_{ij}| \quad \dots \dots \dots (3),$$

$$\|Z\| = n \cdot \max_{i,j} |z_{ij}| \quad \dots \dots \dots (4).$$

$\|D\|$ kann nach (2) abgeschätzt werden. Für $\|A^{-1}\|$ hat man Anhaltspunkte aus $A = LR$, vor allem im Falle überwiegender Diagonalelemente bei L und R .

Besonders günstig ist die Situation, wenn man von vornherein auf die Berechnung von A^{-1} ausgeht, also $B = I$ setzt. Denn aus $A X^* = I - D$ folgt (falls $\|D\| < 1$)

$$X - X^* = X^* \sum_{\nu=1}^{\infty} D^{\nu} = X^* D \sum_{\nu=0}^{\infty} D^{\nu},$$

also

$$\|X - X^*\| \leq \|X^* D\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \|D^{\nu}\| \leq \frac{\|X^* D\|}{1 - \|D\|} \quad \dots \dots \dots (5).$$

Wir wenden uns nun dem Fall üblicher Festkommarechnung mit Rundeinheit $\varrho = (1/2) \cdot 10^{-r}$ zu, wobei Produktakkumulation doppelt genau ausgeführt werde. Benützt man spaltenmaximale Leitelemente, so ergibt sich mit der Norm (3) bei schrittweiser Elimination

$$\|D\| \leq \binom{n}{2} \varrho \|X^*\| + \binom{n}{2} \varrho + \binom{n+1}{2} \varrho \leq \binom{n+1}{2} \varrho (\|X^*\| + 2) = \delta_1,$$

bei direktem Ansatz sogar

$$\|D\| \leq (n-1) \varrho \|X^*\| + (n-1) \varrho + \binom{n+1}{2} \varrho = \delta_2.$$

Nach (5) erhalten wir somit die Fehlerabschätzung

$$\|X - X^*\| \leq \frac{\delta_{\nu}}{1 - \delta_{\nu}} \|X^*\| \quad (\nu = 1, 2).$$

Um auch mit der Norm (4) zu möglichst scharfen Fehlerabschätzungen zu kommen, beachten wir bei den Multiplikationen in (2) und (5) den speziellen Aufbau der Matrizen E, F, G . Bei schrittweiser Elimination nach spaltenmaximalen Leitelementen ergibt sich so

$$\|D\| \leq \binom{n+1}{2} \varrho \|X^*\| + n(n-1) \varrho + n^2 \varrho = \varepsilon_1$$

und

$$\|X - X^*\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_1} \varrho \|X^*\| \left(\frac{n^2}{3} \|X^*\| + 2 \binom{n+1}{2} \right),$$

bei direktem Ansatz und spaltenmaximalen Leitelementen

$$\|D\| \leq n \varrho \|X^*\| + n(n+1) \varrho = \varepsilon_2$$

und

$$\|X - X^*\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_2} n \varrho \|X^*\| \left(\|X^*\| + \frac{n+3}{2} \right).$$

JÖRGENS [3] gelangte (wohl auf anderem Wege) zu einer weniger günstigen Schranke. Natürlich kann man entsprechende Abschätzungen auch unter modifizierten Voraussetzungen bzw. geeigneten Annahmen über E usw. durchführen.

Es zeigt sich, daß L^* die Fehlerschranken nicht sehr stark beeinflußt, so daß man eine gewisse Freiheit bei der Wahl der Leitelemente hat. Allerdings sind hier noch andere Gesichtspunkte zu berücksichtigen, z. B. Abschätzungen von L^{-1} und R^{-1} sowie das Anwachsen der Zahlen im Laufe der Elimination. Bei Wahl spaltenmaximaler Leitelemente kann das Betragsmaximum von A_k sich in jedem Schritt verdoppeln, so daß mit der Norm (4) schließlich $\|A_n\| = 2^{n-1} \|A_1\|$ ist. Das tritt nicht auf bei matrix-maximalen Leitelementen: Anwendung der HADAMARDSchen Ungleichung auf rechte untere Eckmatrizen der A_k zeigt

$$\|A_k\| \leq k^{\frac{k}{2(k-1)}} \|A_1\| \prod_{\nu=2}^{k-1} \frac{1}{\nu^{2(\nu-1)}} \quad (k = 2, \dots, n),$$

was sicher noch zu verschärfen ist. (Auf der rechten Seite kann allerdings die erwähnte Verdopplung immer noch eintreten.) Die matrix-maximale Wahl ist also trotz gewisser Schwierigkeiten (vor allem beim direkten Ansatz) durchaus in Erwägung zu ziehen.

Bei Gleitkommarechnung — insbesondere bei weitgespanntem Größenbereich der Koeffizienten — werden die Fehlerabschätzungen unübersichtlich. Auch ist die Wahl maximaler Leitelemente nur noch teilweise gerechtfertigt. Man wird versuchen, durch Zeilen- und Spaltenfaktoren die Koeffizienten möglichst gleichgroß zu machen, worauf die weiteren Überlegungen wie bei Festkomma verlaufen. Rechnet man unnormalisiert, so kann man bei der Wahl des Leitelements nicht nur seine Größe, sondern auch seine Genauigkeit in Betracht ziehen.

Literatur

- [1] J. v. NEUMANN, H. H. GOLDSTINE, Numerical inverting of matrices of high order, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), S. 1021—1099.
- [2] J. H. WILKINSON, Rounding errors in algebraic processes, Information Processing (UNESCO Conference Paris 1959), München 1960, Oldenbourg-Verlag, S. 44—53.
- [3] K. JÖRGENS, Fehlerabschätzung für die numerische Inversion von Matrizen, ZAMM **40** (1960), S. T15.
- [4] CH. BLANC, Sur l'estimation des erreurs d'arrondi, Information Processing (UNESCO Conference Paris 1959), München 1960, Oldenbourg-Verlag, S. 54—57.
- [5] F. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis, 3. Aufl. Berlin 1957, W. de Gruyter & Co.

Anschrift: Prof. Dr. K. ZELLER, Math. Institut der Universität Tübingen, Tübingen, Wilhelmstr. 7

Bernoullische Zahlen und Eulersche Konstante

H. FISCHER und K. ZELLER

Seit Einführung der elektronischen Rechenanlagen hat man sich wieder mehr mit der Berechnung von numerischen Konstanten abgegeben. Diese Rechnungen wurden oft als Sport betrieben, können aber auch wissenschaftlich interessant sein. Ferner geben sie einen Eindruck von der Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit der Maschine. Das Programmieren der Aufgaben ist reizvoll und lehrreich; häufig fallen dabei wichtige Unterpläne oder Programmiermethoden an.

Ziemlich einfach ist die Berechnung von Zahlen wie e und π , da hier rasch konvergierende Reihen übersichtlichen Aufbaus zur Verfügung stehen: Die Tübinger Anlage (Si 2002) liefert ohne großen Aufwand einige 10000 Stellen. Andere Zahlen wie die EULERSche Konstante C bereiten erheblich mehr Schwierigkeiten.

Bei C stützt man sich wohl am besten auf die EULERSche Summenformel. Die Überlegungen bei KNOPF [1] auf S. 545/546 zusammen mit der Restabschätzung auf S. 552 zeigen

$$C = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} - \log n + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k \cdot n^{2k}} + \theta \frac{B_{2m+2}}{(2m+2) n^{2m+2}} \dots \dots \dots (1)$$

(mit $0 \leq \theta \leq 1$). In dieser Formel kann man m und n gegeneinander ausspielen. Die Wahl $m = 200$ und $n = 10000$ erwies sich für uns als günstig. Man kommt damit auf über 1000 Stellen von C . Bekannt waren schon 263 Stellen (siehe [5], S. 389).

Die Anwendung von (1) setzt die Kenntnis der dort vorkommenden BERNOULLISchen Zahlen B_{2k} voraus. Diese spielen ja in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine Rolle, so daß ihre Berechnung auch selbständiges Interesse hat. Von JAKOB BERNOULLI, EULER, OHM, ADAMS, SEREBRENNIKOFF und LEHMER stammen Tafeln der B_{2k} bis B_{220} (siehe [2], S. 456, und [5], S. 388). Diese Tafeln mußten also bis B_{400} erweitert werden.

Für die Berechnung der B_{2k} standen folgende Beziehungen zur Debatte:

$$(2k+1) B_{2k} = -\frac{2k-1}{2} + \sum_{v=1}^{k-1} \binom{2k+1}{2v} B_{2v} \dots \dots \dots (2)$$

(die übliche Rekursionsformel, siehe [1], S. 185),

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v^{2k}} \dots \dots \dots (3)$$

(die geläufige Summenformel, siehe [1], S. 245),

$$B_{2k} = \sum_{v=0}^{2k} \frac{1}{v+1} \sum_{\varrho=0}^v (-1)^{\varrho} \binom{v}{\varrho} \varrho^{2k} \dots \dots \dots (4)$$

(siehe [3], S. 229),

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} \cdot 2k}{(2^{2k} - 1) 2^{2k-1}} \sum_{v=0}^{k-1} (-1)^v (k-v)^{2k-1} \left\{ \sum_{\varrho=0}^v \binom{2k}{\varrho} - \frac{1}{2} \binom{2k}{v} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

(vgl. [4], S. 401). Ein wichtiges Hilfsmittel ist ferner der Satz von CLAUSEN und v. STAUDT, der die Primteiler des Nenners von B_{2k} angibt und so geschrieben werden kann

$$B_{2k} \equiv - \sum_{p \equiv 1 \pmod{2k}} \frac{1}{p} \pmod{1} \quad (6)$$

(siehe [2] S. 33).

Bei der Wahl der Rechenmethode sind die Möglichkeiten der Maschine (Speicherplatz, Arbeiten mit mehrfacher Wortlänge) sowie der Programmieraufwand zu berücksichtigen. Für uns schien eine Rekursion am günstigsten. Wir verzichteten auf die von LEHMER angegebenen lakunären Rekursionen. Jedoch beseitigten wir in (2) die Nenner durch Multiplikation mit dem Produkt der Primzahlen $p \leq 2k - 1$. In jedem Rekursionsschritt lassen sich nun Zähler und Nenner eines B_{2k} durch Wegdividieren überflüssiger Faktoren und Anwendung von (6) gewinnen. Zur Kontrolle benützten wir das Aufgehen der Divisionen sowie (3).

Da die B_{2k} rasch anwachsen, arbeitet man mit hoher Stellenzahl (bis 800). Es bedeutet aber eine Erleichterung, daß man mit Multiplikatoren und Divisoren einfacher Wortlänge und größtenteils mit vorzeichenfreien Additionen auskommt. Der Speicherplatz (etwa 150000 Dezimalstellen) reichte gerade aus. Die anschließende Auswertung von (1) machte keine großen Schwierigkeiten. Für den Logarithmus benützten wir die bei KNOPP [1], S. 262—265 angegebenen Methoden, wobei wir als Nebenresultat einen sehr genauen Wert von $1/M$ erhielten.

Literatur

- [1] K. KNOPP, Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen, Berlin und Heidelberg 1947, Springer-Verlag.
- [2] N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Springer-Verlag.
- [3] A. O. GELFOND, Differenzenrechnung (Übersetzung aus dem Russischen), Berlin 1958, Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [4] B. V. BOWDEN, Faster than thought (Symposium), London 1953/1955, Verlag Pitman.
- [5] A. V. LEBEDEV und R. M. FEDOROVA, A guide to mathematical tables (Übersetzung aus dem Russischen), Oxford 1960, Pergamon Press.

Anschrift: Prof. Dr. K. ZELLER, Math. Institut der Universität Tübingen, Tübingen, Wilhelmstr. 7

Nichtsinguläre Schaltwerke

Von GÜNTER HOTZ*)

Ein Schaltwerk [1], [2], [3] ist ein Gerät, dem von außen Zeichen S_1, S_2, \dots, S_n zugeführt werden können, das einen Speicher enthält, dessen Zustand z eine Funktion eines Ausgangszustandes z_0 und der inzwischen eingegebenen Zeichen S_i ist. Weiter gehört zu einem Schaltwerk eine Ausgabevorrichtung, die Zeichen y in Abhängigkeit von z und dem eingegebenen Zeichen S_i ausgibt. Die Menge der Zustände z des Speichers sei mit \mathcal{Z} bezeichnet; \mathcal{Z} sei eine endliche Menge. Ebenso sei der Wertevorrat \mathcal{Y} des Schaltwerkes endlich. Weiter gibt es in dem Gerät eine Synchronisierungseinrichtung, die die eindeutige Bildung von Tripeln S_i, z, y gestattet und die Anordnung dieser Tripel in eine Folge, so daß man von dem Vorgänger und dem Nachfolger eines Tripels sprechen kann. Wir wollen nun annehmen, daß durch S_i und z eines Tripels eindeutig y bestimmt wird und der auf z folgende Zustand z' . Wir schreiben dafür

$$S_i z = z' \quad (1),$$

$$[S_i, z] = y \quad (2).$$

Hieran schließen wir die mathematische Definition des Schaltwerkes an:

Sind drei endliche Mengen $\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y}$ gegeben, so daß jedem Element S_i von \mathcal{S} eine eindeutige Abbildung (1) und (2) von \mathcal{Z} in sich und \mathcal{Z} in \mathcal{Y} entspricht, dann sagen wir, daß das Tripel $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ ein Schaltwerk definiert.

Sei nun $(\mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein zweites Schaltwerk und sei $a(x) = z$ eine Abbildung von \mathcal{X} auf \mathcal{Z} , die nicht notwendig eindeutig ist. Gilt dann für jedes $S_i \in \mathcal{S}$ und jedes Paar x, z , das in der Beziehung $z = a(x)$ steht

$$a(S_i x) = S_i z, \quad [S_i, x] = [S_i, z],$$

dann heißen $(\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ und $(\mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ austauschbar.

*) Telefunken, Konstanz.

Eine Hauptaufgabe der Theorie der Schaltwerke besteht in der Bestimmung der „reduzierten“ Schaltwerke; ein Schaltwerk $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$ ist reduziert, wenn für jedes austauschbare Schaltwerk die Abbildung $z = a(x)$ eindeutig ist, d. h. die Anzahl der Elemente von \mathfrak{Z} ist minimal unter allen zu austauschbaren Schaltwerken gehörigen Mengen „ \mathfrak{Z} “.

Wir bilden nun Worte $W(S) = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_k}$ mit $S_i \in \mathfrak{S}$. Unter $W(S)z = z'$ verstehen wir den Punkt von \mathfrak{Z} , den man erhält, wenn man sämtliche Elemente von $W(S)$ mit dem jeweils rechts stehenden beginnend der Reihe nach auf z anwendet. Zwei Punkte z und $z^* \notin \mathfrak{Z}$ heißen nun äquivalent, wenn für jedes $S_i \in \mathfrak{S}$ gilt

$$[S_i, z] = [S_i, z]^*$$

und für jedes $W(S)$

$$[S_i, W(S)z] = [S_i, W(S)z^*].$$

Hilfssatz 1. Ist K eine Klasse äquivalenter Punkte von \mathfrak{Z} und sei $W(S)K$ die Menge der Punkte, die man erhält, wenn man auf jedes Element von K die Abbildung $W(S)$ anwendet, dann sind die Elemente von $K' = W(S)K$ auch äquivalent.

Der Beweis folgt direkt aus der Definition der Äquivalenz.

Wir ordnen nun jedem Schaltwerk einen Streckenkomplex [1], [2], [3] zu, indem wir jedem Punkt von \mathfrak{Z} eineindeutig einen Punkt zuordnen, und zwei zu z und z' gehörige Punkte P bzw. Q genau dann durch eine orientierte Strecke s_i verbinden, wenn $S_i z = z'$ ist; dabei heißt P der Anfangspunkt und Q der Endpunkt von s_i .

Ein Punkt des Streckenkomplexes heißt singular bezüglich S_i , wenn er Endpunkt von mindestens zwei Strecken s_i ist. Im anderen Falle heißt der Punkt bezüglich S_i nicht singular. Sind alle Punkte bezüglich S_i nicht singular, dann definiert S_i eine eineindeutige Abbildung von \mathfrak{Z} auf sich. Wir nennen dann das Schaltwerk bezüglich S_i nicht singular und nennen es nicht-singular schlechthin, wenn es für jedes S_i ($i = 1, \dots, n$) nicht singular ist [4].

Hilfssatz 2. Sei $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$ bezüglich den Elementen von $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ nicht singular. Ist dann $W(S)$ ein Wort mit Elementen nur aus \mathfrak{S}' , dann gibt es ein Wort $W'(S)$ mit Elementen auch nur aus \mathfrak{S}' , so daß

$$W'(S)W(S)z = z \quad \text{für jedes} \quad z \in \mathfrak{Z}.$$

Beweis: Tritt in einem Wort $W(S)$ n_i -mal hintereinander das Zeichen S_i auf, dann schreiben wir abkürzend dafür auch $S_i^{n_i}$, wie es in der Algebra allgemein üblich ist. Da $S_i \in \mathfrak{S}'$ nicht singular ist, sind auch $S_i^2, S_i^3, S_i^4, \dots$ nicht singuläre Abbildungen von \mathfrak{Z} auf sich. Da \mathfrak{Z} aber endlich ist, gibt es eine kleinste natürliche Zahl n_i mit $S_i^{n_i}z = z$, d. h. daß $S_i^{n_i}$ die identische Abbildung ist. Für die identische Abbildung schreiben wir $\underline{1}$ und $W(S) \cdot \underline{1} = W(S)$. Ist nun $W(S) = S_{i_1}^{m_1} S_{i_2}^{m_2} \dots S_{i_k}^{m_k}$, dann können wir annehmen, daß $m_1 \leq n_1, \dots, m_k < n_k$ ist, wo $S_{i_k}^{n_k} = \underline{1}$ ist. Bilden wir nun $W'(S) = S_{i_k}^{n_k - m_k} \dots S_{i_1}^{n_1 - m_1}$, dann ist $(W'(S)W(S))z = \underline{1}z = z$, womit alles bewiesen ist.

In diesem Hilfssatz kommt zum Ausdruck, daß die Menge der durch die Worte $W(S)$ aus Elementen von \mathfrak{S}' definierten Abbildungen von \mathfrak{Z} auf sich eine Gruppe \mathfrak{G} bilden. Wir definieren nun S_i^{-1} für $S_i \in \mathfrak{S}'$ und $S_i^{n_i} = \underline{1}$ durch die Fortsetzung $S_i^{-1}z = S_i^{n_i-1}z$. Bezeichnen wir mit \mathfrak{F} die durch die Elemente von \mathfrak{S}' erzeugte freie Gruppe, dann ist für jedes Gruppenelement $W(S) \in \mathfrak{F}$ die Abbildung

$$z \rightarrow W(S)z$$

definiert. Diese Abbildung definiert einen Homomorphismus von \mathfrak{F} auf die Gruppe der Abbildungen \mathfrak{G} . Bezeichnen wir mit \mathfrak{R} die Menge der Elemente von \mathfrak{F} , die die identische Abbildung induzieren, dann ist \mathfrak{R} Normalteiler von \mathfrak{F} , und es gilt

$$\mathfrak{G} \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{R} \dots \dots \dots (3).$$

Aus Hilfssatz 2 folgt leicht

Hilfssatz 3. Sei $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$ ein Schaltwerk, das bezüglich $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ nicht singular ist. Ist K eine Äquivalenzklasse in \mathfrak{Z} , dann ist auch $W(S)K$ eine Äquivalenzklasse, wenn die Elemente von $W(S)$ aus \mathfrak{S}' sind.

Ein Schaltwerk heißt transitiv, wenn es zu je zwei Punkten z und z' ein $W(S)$ gibt, so daß $W(S)z = z'$ oder $W(S)z' = z$ ist.

Hilfssatz 4. Ist $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$ nicht singular und transitiv, dann gibt es zu jedem Paar z, z' ein $W(S)$, so daß $W(S)z = z'$ ist.

Der Beweis folgt sofort aus Hilfssatz 2.

Sei nun $(\mathfrak{S}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Y})$ ein Schaltwerk. Mit \mathfrak{Z}^* sei die Menge der Äquivalenzklassen dieses Schaltwerks bezeichnet und mit z^* die Elemente von \mathfrak{Z}^* . Wir definieren

$$z^{**} = W(S)z^* \dots \dots \dots (4),$$

indem wir aus z^* einen Repräsentanten z auswählen, auf diesen $W(S)$ anwenden und die Äquivalenzklasse des Ergebnisses mit $z^{*'}$ bezeichnen. Auf Grund von Hilfssatz 1 ist diese Definition eindeutig. Weiter definieren wir

$$[S_i, z^*] = y \dots \dots \dots (5)$$

falls für einen Repräsentanten z von z^* gilt $[S_i, z] = y$. Auf Grund der Definition der Äquivalenz ist auch (5) eindeutig erklärt. Mit der Definition (4) und (5) wird aber $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ zu einem Schaltwerk. Es gilt nun:

Hilfssatz 5. Die Schaltwerke $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ und $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ sind austauschbar und $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ ist reduziert.

Der Beweis für den ersten Teil ergibt sich, indem man als Abbildung $z^* = a(z)$ die kanonische Abbildung, nämlich der Elemente auf ihre Äquivalenzklassen, wählt. Der zweite Teil der Behauptung folgt daraus, daß durch $a^{-1}(z^*)$ auf den gleichen Punkt bezogene Punkte von \mathcal{Z}^* äquivalent sind; und nach Konstruktion von \mathcal{Z}^* enthalten die Äquivalenzklassen von $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ nur genau einen Punkt.

Satz 1. Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ nicht singulär, dann ist das reduzierte Schaltwerk $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ nicht singulär.

Beweis: Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ singulär. Dann gibt es ein z_1^*, z_2^* , ein z^* und ein S_i mit $z^* = S_i z_1^* = S_i z_2^*$. Das steht aber mit Hilfssatz 3 im Widerspruch.

Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von \mathcal{Z} als die Ordnung des Schaltwerks $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$. Mit dieser Definition gilt:

Satz 2. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ transitiv und nicht singulär bezüglich $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$. $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ sei mit $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ austauschbar und reduziert. Dann ist die Ordnung von $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ ein Teiler der Ordnung von $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$.

Der Beweis ergibt sich durch Anwendung von Hilfssatz 2, 3, 4.

Sei nun $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ nicht singulär und sei \mathcal{G} die im Sinne von (3) zu $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ gehörige Gruppe. $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ sei mit $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ austauschbar und reduziert. Nach dem Satz 1 ist $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ auch nicht singulär. \mathcal{G}^* sei die zu $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Y})$ gehörige Gruppe. Wie hängen nun \mathcal{G} und \mathcal{G}^* zusammen? Es genügt, den Fall der Transitivität von $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ zu betrachten.

Sei g_z die Menge aller Elemente von \mathcal{G} , die die Äquivalenzklasse von z in sich abbilden. Dann ist $g = \bigwedge g_z$ ein Normalteiler von \mathcal{G} , da wegen Hilfssatz 3 und der Transitivität die Gruppen g_z durch Transformation auseinander hervorgehen. Dann gilt

Satz 3. Unter Verwendung der eben erklärten Bezeichnung gilt

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G}/g \dots \dots \dots (6)$$

Beweis: Durch die Definition von \mathcal{G} und \mathcal{G}^* ist unmittelbar ein Homomorphismus von \mathcal{G} auf \mathcal{G}^* gegeben. Der Kern dieses Homomorphismus besteht aus genau den Elementen, die alle Äquivalenzklassen von $(\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ festlassen. Das ist aber nach Konstruktion g , womit der Beweis erbracht ist.

Ein Schaltwerk heißt regulär, wenn es nicht singulär und einfach transitiv ist; d. h. wenn es zu jedem Paar z, z' aus \mathcal{Z} genau ein $g \in \mathcal{G}$ gibt mit $g z = z'$, wo $g z$ über die Repräsentanten w von g erklärt ist. In diesem Fall ist der zu dem Schaltwerk gehörige Streckenkomplex das Gruppenbild von g . Zeichnen wir einen Punkt z_0 in \mathcal{Z} aus, so wird durch die Zuordnung $g \rightarrow g z_0$ eine eindeutige Abbildung von \mathcal{G} auf \mathcal{Z} definiert. Das Schaltwerk ist vollständig bestimmt durch die Struktur von \mathcal{G} und die Funktion $[S_i, z] = [S_i, g z_0]$, wofür wir einfach $[S_i, g]$ schreiben können.

Bei dem Entwurf von Schaltwerken kommt es vor, daß das Schaltwerk in dieser Form gegeben ist. Als Beispiel sei ein Zähler angeführt, der die Anzahl der Signale S_i modulo n_i ($i = 1, \dots, n$) zähle. Dabei ist \mathcal{G} gegeben durch die erzeugenden S_1, S_2, \dots, S_n und die definierenden Relationen $S_i^{n_i} = 1$, ($i = 1, \dots, n$); $S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = 1$ für $i, k = 1 \dots n$.

Von der Funktion $[S_i, g]$ wird nur verlangt, daß sie eine eindeutige Abbildung auf die N ersten natürlichen Zahlen liefert, wo N die Ordnung der Gruppe \mathcal{G} ist. \mathcal{G} ist hier eine endliche abelsche Gruppe und der Entwurf deshalb einfach. Die Schwierigkeiten, die bei der Konstruktion von Schaltwerken auftreten, werden aus diesem Zusammenhang mit den bekannten gruppentheoretischen Aufgaben verständlich.

Literatur

- [1] HUFFMAN, The Synthesis of Sequential Switching Circuits, J. Franklin Inst. 257 (1954), p. 161—180.
- [2] G. H. MEALY, A Methode for Synthesising Sequential Circuits, Bell System Techn. J. 34 (1955), p. 1045 bis 1080.
- [3] E. F. MOORE, Gedanken-Experiments on Sequential Machines, Automata Studies, Princeton 1956, p. 129 bis 153.
- [4] W. H. KAUTZ, State-Logic Relations in Autonomons Sequential Networks, Proceedings East. J. Comp. Conf. 1958, p. 119—127.

Anschrift: Dr. G. HOTZ, Konstanz, Peter-Rosegger-Weg 27

Behandlung von Approximationsproblemen mit einem elektronischen Analogrechner

Von REINHOLD MANNSHARDT*)

Gegeben seien in einem Intervall $J: 0 \leq t \leq T$ eine Funktion $f(t)$ und eine Funktion $f_n(t; a_1, \dots, a_n)$. Für die reellen Parameter a_ν sollen folgende Nebenbedingungen gelten:

$$a_{n-k+\kappa} = \varphi_\kappa(a_1, \dots, a_{n-k}) \quad \kappa = 1, \dots, k \quad (1),$$

$$\psi_\lambda(a_1, \dots, a_n) \geq 0 \quad \lambda = 1, \dots, l \quad (2).$$

Jedem n -tupel (a_1, \dots, a_n) , das diesen Bedingungen genügt, wird eine nichtnegative Zahl $D(a_1, \dots, a_n)$ zugeordnet, die sich aus dem Verlauf der Funktionen f und f_n in J berechnen läßt („Abstand zwischen f und f_n “) und für $f_n \equiv f$ verschwindet:

$$D(a_1, \dots, a_n) = [f, f_n] \geq 0; \quad [f, f] = 0.$$

Die Funktionen φ_κ , ψ_λ und D sollen hinreichend glatt sein.

Approximationsproblem

Gesucht sind Parameterkombinationen (a_1, \dots, a_n) , für welche D unter den Bedingungen (1) und (2) möglichst klein wird. (Manchmal sind auch schwächere Forderungen angebracht, z. B. die Frage nach einem relativen Minimum von D .)

Wie müssen die Funktionen f , f_n , φ_κ , ψ_λ , D beschaffen sein, damit man dieses Problem zweckmäßig mit einem elektronischen Analogrechner behandeln kann? Es kommt darauf an, welche spezielle Maschine zur Verfügung steht. Man setze t proportional der Maschinenzeit. Dann sind folgende Voraussetzungen zu beachten:

Die Funktionen $f(t)$ und $f_n(t)$ sollen auf dem Analogrechner als Funktionen der Zeit darstellbar sein, z. B. als Lösungen von Differentialgleichungen oder durch Überlagerung von elementaren Funktionen. Ist f_n Lösung einer Differentialgleichung, so können die Parameter a_ν sowohl in der Differentialgleichung selbst als auch in den Anfangsbedingungen vorkommen. Die Funktionen φ_κ sollen „rasch“ berechnet werden können (mit oder ohne Analogrechner). Sie können explizit (z. B. als algebraische Funktionen) angegeben sein oder auch implizit, etwa dadurch, daß aus der Funktionenschar $f_n(t; a_1, \dots, a_n)$ eine Teilschar von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften (z. B. Übereinstimmung mit $f(t)$ für einzelne t -Werte, Periodizität, Beschränktheit, asymptotische Eigenschaften) ausgesondert wird. Von den Funktionen ψ_λ ist vorauszusetzen, daß man (evtl. mit der Maschine) „rasch“ entscheiden kann, ob die Ungleichungen (2) erfüllt sind oder nicht. Der Abstand $[f, f_n]$ soll mit dem Analogrechner „leicht“ berechnet werden können; Beispiele:

$$\int_0^T |f - f_n|^m g(t) dt \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad \text{Max}_J (|f - f_n| \cdot g(t)) \quad (g(t) > 0).$$

Statt f und f_n können in diesen Ausdrücken auch beispielsweise die zeitlichen Ableitungen von f und f_n stehen; man wird dann zusätzlich verlangen, daß f und f_n für wenigstens einen t -Wert übereinstimmen.

Es gibt zwei Iterationsverfahren, die unter den genannten Voraussetzungen zum Ziel führen. Beide beginnen mit einer weitgehend beliebigen Parameterkombination (a_{10}, \dots, a_{n0}) , welche den Bedingungen (1) und (2) genügt.

Partielle Minimalisierung

Man halte r Parameter, etwa a_1, \dots, a_r , fest ($1 \leq r \leq n - k - 1$) und ändere die restlichen Parameter unter Berücksichtigung von (1) und (2) so, daß D möglichst klein wird; d. h. man suche ein Minimum von D unter den Nebenbedingungen (1), (2) und $a_1 = a_{10}, \dots, a_r = a_{r0}$. Man führt so das ursprüngliche Minimalproblem auf eine Folge von Minimalproblemen mit weniger Veränderlichen zurück. Diese neuen Probleme sind leichter zu behandeln, z. B. indem man sich (mit Hilfe des Analogrechners) einen Überblick über den Verlauf der Funktion $D(a_1, \dots, a_n)$ unter den eben genannten Nebenbedingungen verschafft.

*) Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule München (Direktor: o. Prof. Dr. J. HEINHOLD).

Jedes dieser einfacheren Minimalprobleme liefert als Lösung die Parameterwerte für den Beginn des nächsten Iterationsschrittes. Beim nächsten Schritt muß man mindestens einen Parameter, der beim vorigen Schritt festblieb, ändern und mindestens einen Parameter, der beim vorigen Schritt geändert wurde, festhalten. Bei weiteren Iterationsschritten ist darauf zu achten, daß die Parameter a_1, \dots, a_{n-k} möglichst regelmäßig geändert werden, z. B. durch zyklische Vertauschung.

Gradientenverfahren

(hier ohne die Bedingungen (2) erläutert)

Man setze (1) in die Funktion D ein (wodurch die Anzahl der Parameter um k vermindert wird) und schreite in entgegengesetzter Richtung des Gradienten der so erhaltenen Funktion von a_1, \dots, a_{n-k} fort; dieser Gradient hat die Komponenten

$$D_\mu = \frac{\partial D}{\partial a_\mu} + \sum_{\kappa=1}^k \frac{\partial D}{\partial a_{n-k+\kappa}} \cdot \frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial a_\mu} \quad \mu = 1, \dots, n-k \quad (3).$$

Die Iterationsvorschrift lautet:

$$a_{1\mu} = a_{\mu 0} - \Delta_0 D_{\mu 0} \quad \mu = 1, \dots, n-k \quad (4),$$

dabei ist Δ_0 eine hinreichend kleine positive Zahl, während $D_{\mu 0}$ die Funktion D_μ an der Stelle $a_1 = a_{10}, \dots, a_n = a_{n0}$ bedeutet. Die in (3) vorkommenden partiellen Ableitungen können an dieser Stelle mit dem Analogrechner manchmal „exakt“, meist jedoch angenähert mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet werden. Die restlichen Parameter a_{n-k+1}, \dots, a_n sind anschließend durch Einsetzen der $a_{\mu 1}$ in (1) zu berechnen.

Beide Verfahren sind durch häufige Parameteränderungen gekennzeichnet, die sich mit einem repetierenden Analogrechner besonders leicht durchführen lassen. Die Parameter können am besten an Drehpotentiometern eingestellt und variiert werden. Welches der beiden Verfahren vorzuziehen ist oder wie man diese am zweckmäßigsten kombiniert, muß im konkreten Einzelfall beurteilt werden. Die einzelnen Iterationsschritte lassen sich unter Verwendung von Steuervorrichtungen und digitalen Recheneinheiten evtl. vollautomatisch durchführen, so daß Zwischenablesungen und schriftliche Zwischenrechnungen entfallen. Mit größerem Aufwand lassen sich auch allgemeinere Approximationsprobleme behandeln. Der Einsatz von Analogrechenelementen ist i. a. dann vorteilhaft, wenn im Lauf der Rechnung Integrationen durchzuführen sind.

Literatur

R. HERSCHEL, Automatische Optimisatoren, Elektronische Rechanlagen 8 (1961), S. 30—36.

Anschrift: Dipl.-Math. REINHOLD MANNSHARDT, München 23, Viktor-Scheffel-Str. 17/I

Zur strukturellen Entwicklung elektronischer Rechananlagen*)

Von CARL ADAM PETRI

Die Beurteilung einer elektronischen Rechananlage und überhaupt eines informationsverarbeitenden Systems hat sich auf einer Beschreibung des Aufgabenbereichs zu gründen. Unter der strukturellen Entwicklung ist also eine Anpassung der Struktur von zu entwerfenden Anlagen an die „Struktur“ der voraussichtlich häufigsten Aufgaben zu verstehen.

Für viele Benutzer (besonders größerer Anlagen) steht die reine Rechenleistung keineswegs mehr im Mittelpunkt des Interesses; immer häufiger fordert man die Bearbeitung von Aufgaben oder Teilaufgaben nicht-numerischen Charakters. Auch diese Fälle sollen in die Betrachtung einbezogen werden.

Behandelt man die Informationswandlung zwischen Ein- und Ausgang der Maschine als Übersetzung zwischen formalen Sprachen, so kann man die Aufgabenstruktur durch einen metasprachlichen Ausdruck kennzeichnen, indem man

1. eine endliche Menge von Klassen von Elementarprozessen vorgibt und
2. aus den Klassennamen mit Hilfe folgender Operatoren einen Ausdruck aufbaut: Auswahl-, Folge-, Zyklus-, Parallelitätsoperator. Je nachdem, welche Operatoren unvermeidlich sind, zerfallen die so beschriebenen Aufgaben in drei Hauptklassen: einfache, iterative und rekursive.

*) Zu einem Hauptvortrag gleichen Titels hatte die Tagungsleitung Herrn Prof. Dr.-Ing. H. UNGER, Bonn, eingeladen; dieser mußte wegen Erkrankung absagen und hat seinen Assistenten Herrn Dipl.-Math. C. A. PETRI veranlaßt, an seiner Stelle zu diesem Thema Stellung zu nehmen.

Es ist nun zu zeigen, in welchem Maße sich die wichtigsten Anforderungen an die Maschinenstruktur, nämlich Homogenität, Flexibilität, Parallelität und Reversibilität, bezüglich der Aufgabenklassen theoretisch erfüllen lassen, und inwieweit sie in der Praxis erfüllt werden. Es werden Beispiele gegeben und anhand der Theorien der Schaltkreise, der synchronen Schaltwerke und der TURING-Maschinen erläutert.

Es erweist sich, daß die bestehenden Anlagen zur Lösung rekursiver Aufgaben wenig geeignet sind, da sie grundsätzlich nur einfache und iterative Klassen von Ausdrücken wahrnehmen können. Die Lösung rekursiver Aufgaben wird überhaupt nur durch zwei Kunstgriffe ermöglicht: 1. Manipulation von Datenträgern außerhalb der Maschine, oder 2. das Übersetzen von Aufgabenbeschreibungen aus der rekursiven Sprache in eine Sprache mit höchstens iterativer Syntax („Programmieren“). Diese Übersetzung ist nicht im allgemeinen, sondern nur im Spezialfall möglich, nämlich bei Kenntnis oberer Schranken für die Anzahl der Rekursionen.

Wenn man die Forderung der Synchronität aufgibt, entfallen die genannten Schwierigkeiten. Das extrem asynchrone Netz ist daher ein möglicher Konvergenzpunkt für die strukturelle Entwicklung der Informationsmaschinen. Die Theorie dieser Netze liefert jedenfalls ein wesentlich wirksameres Darstellungsmittel für komplizierte organisatorische Prozesse als die Theorien, die von den Begriffen „Zeit“ und „Zustand“ ausgehen und daher die Anwendung des Parallelitätsoperators entscheidend einschränken.

Anschrift: Dipl.-Math. C. A. PETRI, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Wegelerstraße 10

Zum Ausmultiplizieren der Klammern beim Verfahren von Nelson

VON HANS ROHLEDER

R. J. NELSON hat ein Verfahren angegeben [1], mit dessen Hilfe zu einem Ausdruck H des Aussagenkalküls der mathematischen Logik sämtliche Primimplikanden¹⁾ ermittelt werden können. Ausgegangen wird dabei von einer beliebigen mit H äquivalenten konjunktiven Normalform H_0 . Bei der Durchführung des Verfahrens sind als erstes alle Klammern von H_0 „auszumultiplizieren“ und daran anschließend (oder auch schon während dieses Prozesses) mittels $a \bar{a} \overline{\overline{Q_0}}$ sowie $a \vee a b \overline{\overline{a}}$ alle überflüssigen Alternativglieder fortzulassen²⁾. Jedes Alternativglied der so entstehenden alternativen Normalform ist ein Primimplikand von H_1 , und umgekehrt kommt auch jeder Primimplikand von H in dieser alternativen Normalform als Alternativglied vor.

Das „Ausmultiplizieren“ der Klammern kann nun, obwohl es prinzipiell keine besonderen Schwierigkeiten bietet, bei der praktischen Durchführung außerordentlich umständlich sein, denn besteht z. B. H_0 nur aus sechs „Faktoren“ und hat jeder dieser „Faktoren“ nur vier Alternativglieder, so treten, wenn die Beziehungen $a \bar{a} \overline{\overline{Q_0}}$ und $a \vee a b \overline{\overline{a}}$ zunächst nicht beachtet werden, insgesamt $4^6 = 4096$ Alternativglieder auf. Es ist deshalb auf jeden Fall notwendig, schon während des „Ausmultiplizierens“ möglichst viele überflüssige Glieder fortzulassen.

Im folgenden wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe eine konjunktive Normalform systematisch „ausmultipliziert“ werden kann und bei dem die Anzahl der Alternativglieder, die aufgeschrieben werden müssen, aber an und für sich überflüssig sind, relativ (zur überhaupt möglichen Anzahl von Gliedern) klein ist. Dasselbe hat außerdem den Vorteil, daß bei der Durchführung von Hand die notwendige Schreiarbeit auf ein Minimum reduziert wird, und es eignet sich zur Durchführung mit programmgesteuerten Rechenanlagen.

Das Verfahren zum Ausmultiplizieren der Klammern beruht darauf, daß für eine konjunktive Normalform H_0 die folgenden Umformungsmöglichkeiten bestehen: Hat H_0 die Gestalt $H_{00}(a \vee H_1)(a \vee H_2) \dots (a \vee H_m)$, wobei man sich vorstellen kann, daß in H_{00} alle „Faktoren“ von H_0 zusammengefaßt sind, in denen a nicht als Alternativglied vorkommt, und wobei $(a \vee H_i)$ die „Faktoren“ von H_0 sind, die a alternativ enthalten, so kann das Verfahren von NELSON statt auf H_0 auch auf $H_{00} H_1 H_2 \dots H_m \vee a H_{00}$ angewendet werden. Das Ergebnis wird in beiden Fällen dasselbe sein, denn wird $(a \vee H_1)(a \vee H_2)$ „ausmultipliziert“, so entsteht zunächst $a \vee a H_1 \vee a H_2 \vee H_1 H_2$. Die Glieder $a H_1$ und $a H_2$ können aber wegfallen, und deshalb darf

¹⁾ Dieser Begriff geht auf W. V. QUINE [2] zurück.

²⁾ Das Zeichen $\overline{\overline{}}$ deutet an, daß die links und rechts davon stehenden Ausdrücke äquivalent (wertverlaufsgleich) sind. Q_0 ist im folgenden ein immer falscher Ausdruck.

$(a \vee H_1) (a \vee H_2)$ durch $a \vee H_1 H_2$ ersetzt werden. Allgemein kann man für $(a \vee H_1) (a \vee H_2) \dots (a \vee H_m)$ auch $a \vee H_1 H_2 \dots H_m$ schreiben, und das ist bei der obigen Feststellung ausgenutzt worden. Der soeben beschriebene Übergang wird im folgenden „Abspalten von a “ genannt. Natürlich ist es möglich, bei $H_{00}(\bar{a} \vee H_1) (\bar{a} \vee H_2) \dots (\bar{a} \vee H_m)$ entsprechend \bar{a} abzuspalten, und man erhält dadurch $H_{00} H_1 H_2 \dots H_m \vee \bar{a} H_{00}$.

Beispiel: Ist $H_0 = (a \vee \bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (a \vee b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y)$, so folgt durch Abspalten von a :

$$H_1 = (\bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y) \vee a (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y).$$

Außer der soeben geschilderten Umformungsmöglichkeit ist die folgende zu beachten: Ist sowohl H' als auch $(H' \vee H'')$ „Faktor“ einer konjunktiven Normalform, so kann das Konjunktionsglied $(H' \vee H'')$ wegen $H'(H' \vee H'') \stackrel{w}{=} H' \vee H' H'' \stackrel{w}{=} H'$ weggelassen werden, und der verkürzte Ausdruck liefert, wenn das Verfahren von NELSON angewendet wird, dieselben Primimplikanten wie der ursprüngliche Ausdruck. Der Übergang von $H'(H' \vee H'') H'''$ zu $H' H'''$ wird im folgenden „Weglassen eines überflüssigen Konjunktionsgliedes“ genannt.

Beispiel: Bei der konjunktiven Normalform $(\bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y)$, welche das erste Alternativglied von H_1 ist, tritt neben $(\bar{x} \vee y)$ auch $(b \vee \bar{x} \vee y)$ als „Faktor“ auf. Das letzte Konjunktionsglied dieser konjunktiven Normalform darf deshalb weggelassen, und statt H_1 ist der einfachere Ausdruck

$$H_2 = (\bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) \vee a (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y)$$

weiter zu behandeln.

Das zweite Alternativglied von H_1 kann noch vereinfacht werden, denn alle Alternativglieder, welche nach dem „Ausmultiplizieren“ der letzten drei Klammern entstehen und den „Faktor“ \bar{a} haben, fallen, weil sie noch konjunktiv mit a zu verknüpfen sind, infolge $a \bar{a} \stackrel{w}{=} 0$ weg. Man kann deshalb schon vor dem Ausmultiplizieren alle Alternativglieder \bar{a} in den Klammern fortlassen, ohne daß dadurch das Ergebnis beeinflußt wird. Durch dieses „Weglassen überflüssiger Alternativglieder“ entsteht aus H_2 der Ausdruck

$$H_3 = (\bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) \vee a (\bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y).$$

Wie man erkennt, ist im hinteren Alternativglied von H_3 die Klammer $(b \vee \bar{x} \vee y)$ überflüssig geworden, weil auch $(b \vee y)$ Konjunktionsglied dieses Teilausdrucks ist, und man erhält deshalb weiter:

$$H_4 = (\bar{x} \vee y) (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) \vee a (\bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee y).$$

Bei H_4 können sowohl keine überflüssigen Alternativglieder als auch keine überflüssigen Konjunktionsglieder weggelassen werden, und es ist deshalb als nächstes bei einer der konjunktiven Normalformen, die als Alternativglied auftreten, wieder eine Variable abzuspalten. Wählt man beim ersten Alternativglied \bar{x} , so erhält man

$$H_5 = y (\bar{a} \vee \bar{y}) (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) \vee a (\bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee y) \vee \bar{x} (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y)$$

und nach Weglassen der überflüssigen Alternativ- und Konjunktionsglieder:

$$H_6 = y \bar{a} b \vee a (\bar{x} \vee \bar{y}) (b \vee y) \vee \bar{x} (b \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y).$$

Indem abwechselnd Variablen abgespalten und überflüssige Alternativ- bzw. Konjunktionsglieder fortgelassen werden (wobei man zweckmäßig mit dem Fortlassen überflüssiger Glieder beginnt, wenn solche vorhanden sind), erhält man schließlich eine alternative Normalform, die mittels $a \vee a b \stackrel{w}{=} a$ nach Möglichkeit zu vereinfachen ist. Danach treten genau die Primimplikanten des ursprünglichen Ausdrucks als Alternativglieder auf.

Wird das Verfahren mit der Hand durchgeführt, so ist es zweckmäßig, die nach den jeweiligen Umformungen entstehenden Ausdrücke nicht jedesmal neu aufzuschreiben, sondern das Umformungsergebnis durch Abändern zu erzeugen. Zum Beispiel entsteht H_1 aus H_0 , indem an H_0 das zusätzliche Alternativglied $a (\bar{a} \vee \bar{x} \vee \bar{y}) (\bar{a} \vee b \vee y) (b \vee \bar{x} \vee y)$ angefügt und daran anschließend im alten Ausdruck H_0 alle unnegierten Variablen a gestrichen werden. Das Weglassen der überflüssigen Alternativ- und Konjunktionsglieder kann ebenfalls durch Streichen erfolgen. Dadurch gelingt es, durch Anfügen und Streichen das Endergebnis in einer (evtl. langen) Zeile auf einmal aufzuschreiben und die Schreiarbeit stark zu reduzieren.

Für die maschinelle Durchführung ist die Wahl der Variablen, welche abgespalten wird, wenn keine anderen Vereinfachungen mehr möglich sind, wichtig³⁾. Man kann hierbei immer eine möglichst oft vorkommende Variable wählen, weil dadurch der alternativ anzufügende Ausdruck

³⁾ Wenn das Verfahren mit der Hand durchgeführt wird, ist es bei einiger Erfahrung nicht schwer, die Übersicht zu behalten.

eine kleinstmögliche Anzahl von „Faktoren“ hat. Bei gewissen Ausdrücken ist es jedoch auch günstig, immer eine Variable zu wählen, die in einer möglichst kurzen Klammer als Alternativglied vorkommt, denn dadurch werden besonders kurze Klammern erzwungen, und die Wahrscheinlichkeit, daß eine Klammer die andere enthält (also überflüssige Konjunktionsglieder weggelassen werden können), ist um so größer, je unterschiedlicher die Länge der einzelnen Klammern ist. Die beiden Auswahlprinzipien, die sich oft widersprechen, können in den verschiedensten Formen kombiniert werden⁴⁾. Außerdem ist es möglich, jede vorkommende Variable probeweise abzuspalten und endgültig diejenige zu wählen, für die das Zwischenergebnis, welches man erhält, wenn alle überflüssigen Alternativ- und Konjunktionsglieder fortgelassen werden, möglichst einfach ist.

Literatur

- [1] R. J. NELSON, Simplest Normal Truth Functions, Journal of Symbolic Logic, Vol. 20 (1955), p. 105—108.
- [2] W. V. QUINE, The Problem of Symplifying Truth Functions. A Way to Simplify Truth Functions, The American Mathematical Monthly, Vol. 59 (1952), p. 521—531 und Vol. 62 (1955), p. 627—631.

Anschrift: Dr. rer. nat. H. ROHLEDER, Dresden N 23, Weinbergstr. 64

⁴⁾ Etwa indem eine geeignete Bewertungsfunktion eingeführt und die Entwicklungsvariable so gewählt wird, daß diese Funktion extrem ist.

C. ALLGEMEINE MECHANIK UND ELASTO-KINETIK

Ausbreitung von Reziprozitäten bei orthotropen Platten

Von W. BIERMANN

Vom Verfasser wurde bereits in [1] und [2] davon berichtet, daß bei gewissen geschlossenen, statischen Systemen, denen durch die Art der Lagerung und die Verteilung der Steifheiten ein gewisser Richtungscharakter eigen ist, eine Ausbreitung der Reziprozitäten bei wechselnder Einheitsbelastung eintritt.

Während sich diese Untersuchungen auf Trägerroste bezogen, soll bei der vorliegenden Arbeit auf die gleiche Erscheinung bei orthotropen Platten hingewiesen werden.

Schreibt man die allgemeine Differentialgleichung der orthotropen Platten bei einer Belastung $p(x, y)$ senkrecht zu ihrer Ebene in der Form einer zugeordneten Differenzengleichung:

$$D_x \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2 D_{xy} \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + D_y \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} = p(x, y) \quad \dots \quad (1),$$

so erhält man für eine ringsum frei aufliegende Platte bei einem Netzsystem mit den Zentralpunkten i, k ($i = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, 4$) zum Beispiel für $i = 1, k = 1$ mit $\Delta x / \Delta y = \kappa$ annähert die Gleichung:

$$(5 D_x + 5 \kappa^4 D_y + 8 \kappa^2 D_{xy}) w_{11} - 4 (D_x + \kappa^2 D_{xy}) w_{12} + D_x w_{13} - 4 (\kappa^4 D_y + \kappa^2 D_{xy}) w_{21} + 2 \kappa^2 D_{xy} w_{22} + \kappa^4 D_y w_{31} = p_{11} \Delta x^4 \quad \dots \quad (2).$$

Hierbei sind die Randbedingungen der freien Lagerung durch:

$$w_{0,k} = w_{i,0} = 0; \quad w_{-1,k} = -w_{1,k}; \quad w_{1,-1} = -w_{1,1} \quad \dots \quad (3)$$

berücksichtigt.

Man erhält i. a. ein Gleichungssystem von der Form:

$$\sum_{i'=1}^m \sum_{k'=1}^n (\alpha_{i k, i' k'} \cdot w_{i' k'}) = p_{i k} \quad \dots \quad (4)$$

mit $i = 1, 2, \dots, m-1, m$; $k = 1, 2, \dots, n-1, n$

das sind $m \cdot n$ Gleichungen, übereinstimmend mit der Anzahl der unbekannten Durchbiegungsgrößen $w_{i' k'}$.

In (4) bedeutet:

— $\alpha_{i k, i' k'}$ = elastische Gegenkraft der Platte im Punkt i, k , wenn in $i' k'$ die Durchbiegung $w = 1$ erzwungen wird,

$w_{i' k'}$ = Durchbiegung in $i' k'$, wenn die Belastungsgruppe $p_{i k}$ wirkt,

$w_{i k, i' k'}$ = Durchbiegung in i, k wenn in $i' k'$ die Last $p_{i' k'} = 1$ wirkt.

Bei einer orthotropen Platte gelten i. a. folgende Annahmen:

a) Steifheiten:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \text{konstant für alle Schnitte in } x\text{-Richtung,} \\ D_y &= \text{konstant für alle Schnitte in } y\text{-Richtung,} \\ D_{xy} &= \text{konstant in allen Punkten} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5).$$

b) Lagerung: konstant in x - und y -Richtung.

Dann haben die Einflußzahlen folgende Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & \alpha_{i k, i' k'} = \alpha_{i' k', i k}, \\ 2) \quad & \frac{\alpha_{i k, i' k'}}{\alpha_{(i+p) k, (i'+p) k'}} = \frac{\alpha_{i (k+q), i' (k'+q)}}{\alpha_{(i+p) (k+q), (i'+p) (k'+q)}}, \\ 3) \quad & \frac{\alpha_{i k, i' k'}}{\alpha_{i (k+q), i' (k'+q)}} = \frac{\alpha_{(i+p) k, (i'+p) k'}}{\alpha_{(i+p) (k+q), (i'+p) (k'+q)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (6),$$

p und q seien ganze Zahlen.

Diese Gleichungen sind dieselben, welche in [2], S. 383 vorausgesetzt waren. Es gelten nach [2] die Reziprozitäten:

$$\frac{w_{ik, i' k'}}{w_{i' k', i' k}} = \frac{p_{i' k'}}{p_{i' k}}; \quad \frac{w_{ik, i' k'}}{w_{i' k, i' k'}} = \frac{p_{i' k'}}{p_{i k}} \quad \dots \dots \dots (7).$$

Die Gleichungen (7) ergeben sich für die Differenzengleichungen unabhängig davon, wie groß die Anzahl der Zwischenpunkte gewählt wird, wie die Steifheiten D_x , D_y , D_{xy} mit den Einschränkungen (5) gewählt werden. Sie ergeben sich aber auch unabhängig davon, wie groß bei der Bildung der Differenzengleichungen die Anzahl der berücksichtigten Glieder der TAYLORSchen Reihe ist.

Hieraus geht hervor, daß die Reziprozitäten (7) für die orthogonalen Platten selbst gelten. Beispiele und eine ausführliche Darstellung sind in [3] enthalten.

Literatur

- [1] W. BIERMANN, Über eine Erscheinung der Häufung und der Spiegelung bei Reziprozitäten. ZAMM 39 (1959), S. 412—413.
- [2] W. BIERMANN, Über Erscheinungen des wiederholten Auftretens Maxwellscher Reziprozitätsbeziehungen, Die Bautechnik 1960 Ausg. A, Heft 10.
- [3] W. BIERMANN, Über ein Verteilungsgesetz für Punktpaare mit reziproker Verformung bei torsionssteifen Kreuzwerken oder orthotropen Platten als Folge einer wechselweisen Einheitsbelastung, Schiffbautechnik 11 (1961), Heft 4.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. W. BIERMANN, Warnemünde, Parkstr. 23

Über die Fahrstabilität des Personenkraftwagens

Von F. BÖHM*)

Ausgehend von dem als starr angenommenen Wagenkasten wurden dessen Bewegungsgleichungen in einem Inertialsystem $x_0 y_0 z_0$ abgeleitet (Bild 1). Die aerodynamischen Kräfte und die Momente \mathfrak{R}_L bzw. \mathfrak{M}_L sowie die Radkräfte wurden dabei als äußere Kräfte eingeführt. Des weiteren wirkt zufolge des Nachlaufs n ein Moment \mathfrak{M}^β um die vertikal stehenden Lenkzapfen der Vorderräder. Schließlich entstehen noch Kreismomente \mathfrak{M}^Z durch die Abweichung von

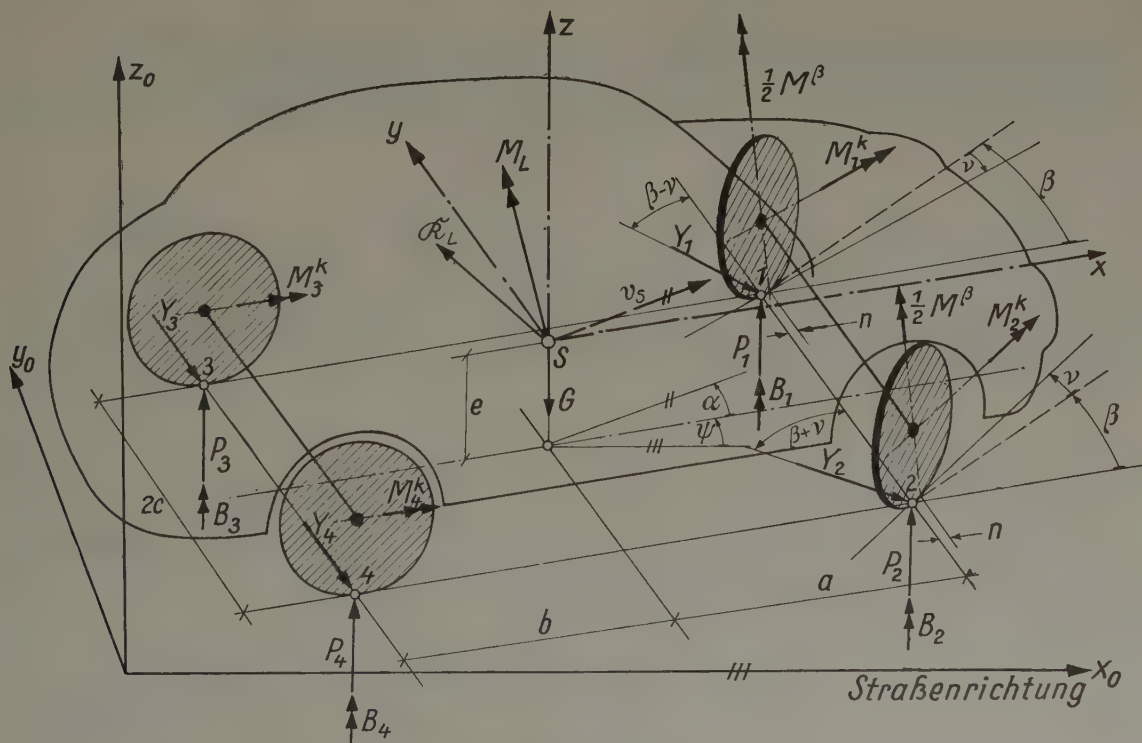


Bild 1. Darstellung eines Automobils in allgemeiner Stellung bei Abweichung von Geradeausfahrt, x_0, y_0, z_0 raumfestes Koordinatensystem, x, y, z körperfestes Koordinatensystem

*) Lehrstuhl für Mechanik für Bauing. der T.H. Stuttgart.

der Geradeausfahrt, die über die Radaufhängungen (Federn, Lenker) ebenfalls auf den Wagenkasten wirken (D'ALEMBERTSche Momente). Um eine Linearisierung dieser Gleichungen zu erreichen, müssen folgende Annahmen getroffen werden:

1) Die Schräglaufwinkel der Räder seien kleiner als 10° . (Geringe Seitenbewegung, d. h. man kann die nichtlinearen Seitenführungskräfte Y_i sowie die Schräglaufmomente B_i linearisieren, Bild 2).

2) Ebene Straße, es wirken keine vertikalen Impulse auf die Räder.

3) Flattersichere Radaufhängung sowie unwuchtfreie Räder, d. h. vertikale Schwingungen der Räder sollen wegen der Nichtlinearität beim Abheben aus der Betrachtung ebenfalls ausgeschlossen werden.

4) Konstante Fahrgeschwindigkeit.

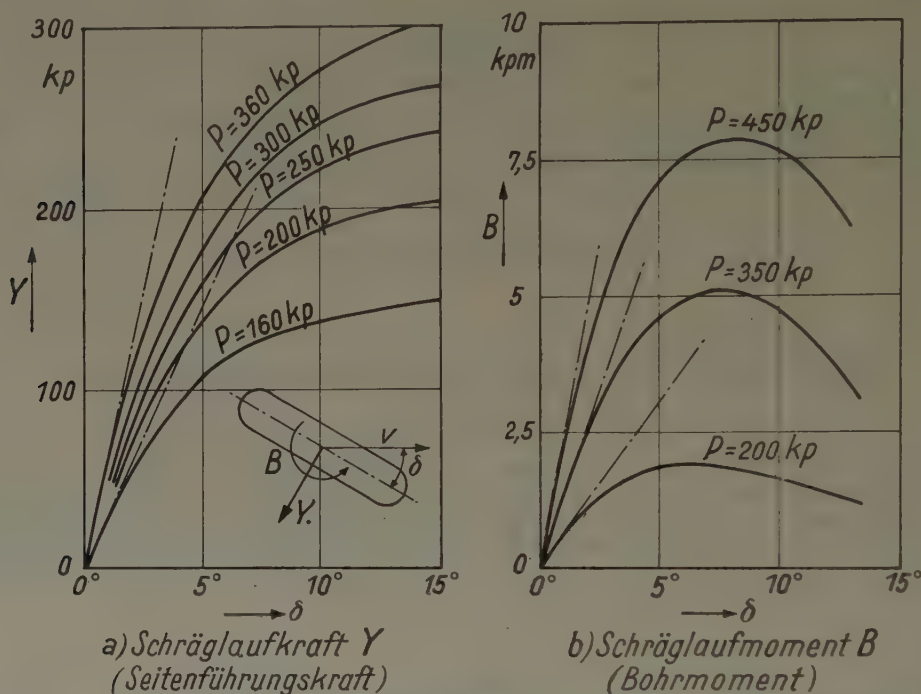


Bild 2. Führungskräfte am Luftreifen zufolge eines Schräglaufes mit dem Winkel δ bei einem Raddruck P .

a) Für kleine Schräglaufwinkel gilt näherungsweise (unterbrochene Linien)

$$Y = (e' - \bar{e} P) P \delta,$$

b) ebenso gilt

$$B = (p' - \bar{p} P) P \delta.$$

Diese Bedingungen entsprechen etwa den Fahrbedingungen eines modernen Personenkraftwagens auf der Autobahn bei schwach gestörter Geradeausfahrt.

Wenn man von Wankbewegungen des Wagenkastens absieht¹⁾, so ergeben der Drallsatz und Schwerpunktsatz für den Wagenkasten, sowie für die Vorderräder der Drallsatz um die Lenkzapfen drei Bewegungsgleichungen für die Unbekannten ψ , α und β .

$$a_{11} \ddot{\psi} + a_{12} \dot{\psi} + a_{13} \dot{\alpha} + a_{14} \alpha + a_{15} \dot{\beta} + a_{16} \beta = a_1 \quad \dots \quad (1.1),$$

$$a_{21} \dot{\psi} + a_{22} \dot{\alpha} + a_{23} \alpha + a_{24} \dot{\beta} + a_{25} \beta = a_2 \quad \dots \quad (1.2),$$

$$a_{31} \ddot{\psi} + a_{32} \dot{\psi} + a_{33} \dot{\alpha} + a_{34} \alpha + a_{35} \dot{\beta} + a_{36} \beta + a_{37} \beta = a_3 \quad \dots \quad (1.3).$$

Die Gleichungen sind linearisiert und haben rechtsseitig Störglieder, die den Einfluß des Seitenwindes darstellen. Führt man in die homogenen Gleichungen einen e -Potenz-Ansatz ein, so erhält man für die Verträglichkeit der Koeffizienten in üblicher Weise eine Determinante, die in den Eigenwerten λ vom 5. Grade ist. Man kann jedoch in der ersten Spalte durch λ kürzen. Dies bedeutet, daß obiges System astatistisch, d. h. integral wirkend ist. Praktisch bedeutet dies, daß eine beliebig kleine, kurzzeitig wirkende Störung das Fahrzeug um einen bestimmten Winkel $\bar{\psi}$ aus der Geradeausfahrt herausdrängt, der nur durch eine Korrektur des Lenkers wieder beseitigt werden kann.

¹⁾ Bei den meisten schnellen Personenkraftwagen ist die Wankbewegung infolge kräftiger Stoßdämpfer stark aperiodisch gedämpft.

Zur Untersuchung der Fahrtrichtungsstabilität wurden die HURWITZ-Kriterien sowie das Verfahren nach [1] verwendet und einige Rechenbeispiele gezeigt. Anschließend wurde das Seitenwindverhalten mit Hilfe der inhomogenen Bewegungsgleichungen untersucht. Die hier gefundenen Lösungen weichen von den in der Literatur [2], [3] gegebenen zum Teil erheblich ab.

Die Veröffentlichung der Arbeit erfolgte im Mai-Heft 1961 der Automobiltechnischen Zeitschrift.

Literatur

- [1] J. M. LORENZ, Über einige Verfahren zur Behandlung von Regelungs-Differentialgleichungen vierter Ordnung und ausgewählte Anwendungsbeispiele, VDI Forschungsheft 460.
- [2] G. MITTERLEHNER, Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen, Ing.-Archiv 27 (1959).
- [3] A. SLIBAR and P. R. PASLAY, Behavior of Vehicles Subjected to Wind Gusts, Ing.-Archiv 28 (1959).

Anschrift: Dr. FRIEDR. BÖHM, Stuttgart-Obertürkheim, Asangstraße 148

Über die Eigenfrequenzen von Kreiszyinderschalen bei verschiedenen Randbedingungen

VON GÜNTHER BRINKMANN*)

Die verschiedenen Theorien der Flächentragwerke reduzieren mit Hilfe von Annahmen über die Zuordnung der Verschiebung allgemeiner Punkte des Tragwerks zu der Verschiebung der Mittelfläche und mit Annahmen über den Spannungsverlauf senkrecht zur Mittelfläche die Gleichgewichtsbedingungen des dreidimensionalen Kontinuums zu einem System von Differentialgleichungen für den Verschiebungsvektor der Mittelfläche. Mit dem Belastungsvektor p_i , dem Verschiebungsvektor u_j und dem tensoriellen Differentialoperator D_{ij} erfüllt jedes Flächenelement die Gleichgewichtsbedingung

$$D_{ij} u_j = p_i.$$

Bei einer freien Schwingung des Flächentragwerks ist der Belastungsvektor p_i zu ersetzen durch den mit der Trägheitsmatrix T_{ij} multiplizierten Beschleunigungsvektor \ddot{u}_j

$$D_{ij} u_j = T_{ij} \ddot{u}_j.$$

D_{ij} und T_{ij} sollen nur Funktionen des Ortes, nicht aber der Zeit t oder der Verschiebung u_j sein, d. h. das Differentialgleichungssystem sei linear. Damit ist die Annahme zulässig, u_j sei eine harmonische Funktion der Zeit mit gleicher Phase für alle Komponenten des Verschiebungsvektors, und nach Ausführung der zeitlichen Differentiation wird das Gleichungssystem zu

$$D_{ij} u_j = -\lambda T_{ij} u_j \quad \text{mit} \quad \lambda = \omega^2.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der differentiellen Verschiebung du_i , so erhält man die Gleichung für die Arbeitsdifferentialiale

$$du_i D_{ij} u_j = -\lambda du_i T_{ij} u_j.$$

Identifiziert man die zusätzliche differentielle Verschiebung mit einem Zuwachs von u_j und berücksichtigt man die Linearität der Differentialgleichungen, so erhält man nach Integration über eine Viertelschwingung

$$\bar{u}_i D_{ij} \bar{u}_j = -\bar{u}_i \lambda T_{ij} \bar{u}_j.$$

Hierbei ist \bar{u}_i die (ortsabhängige) Amplitude der Funktion u_i . Bei gleicher Schwingungsphase aller Volumenelemente können die Elementararbeiten über alle Schalenelemente summiert werden, und da λ vor das Integral gezogen werden darf, folgt schließlich für den RAYLEIGHschen Quotienten:

$$\lambda = - \frac{\int \bar{u}_i D_{ij} \bar{u}_j dF}{\int \bar{u}_i T_{ij} \bar{u}_j dF}.$$

Mit der Minimaleigenschaft des RAYLEIGHschen Quotienten und nach Einführung von (die geometrischen Randbedingungen erfüllenden) Vergleichsfunktionen \bar{v}_i erhält man die Ungleichung:

$$\lambda \leq - \frac{\int \bar{v}_i D_{ij} \bar{v}_j dF}{\int \bar{v}_i T_{ij} \bar{v}_j dF}.$$

*) Technische Hochschule Stuttgart, Lehrstuhl für Technische Mechanik/Bauingenieure.

mierten (im ebenen Fall) der Spannungs- und Verschiebungskomponenten σ_y, τ, u, v ergeben sich dieselben Ausdrücke wie für die HANKEL-Transformierten (nullter Ordnung für σ_y und v , erster Ordnung für τ und u ; im axialsymmetrischen Fall); sie sind lineare Funktionen von A, B, C, D und lassen sich zu einem „Zustandsvektor“ zusammenfassen. Anfangs- und Endvektor der k -ten Schicht (s. Bild 2) sind durch die Feldmatrix $\mathfrak{U}_k(\lambda)$ gemäß

$$\mathbf{r}_k(\lambda) = \mathfrak{U}_k(\lambda) \mathbf{r}_{k-1}(\lambda)$$

miteinander verknüpft. Dabei bedeuten $\mathbf{r}_k(\lambda)$ den Zustandsvektor entsprechend

$$\mathbf{r}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{yk}(\lambda, h_k) \\ \bar{\tau}_k(\lambda, h_k) \\ \bar{v}_k^*(\lambda, h_k) \\ \bar{u}_k^*(\lambda, h_k) \end{pmatrix}$$

und

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{yk}(\lambda, h_k) \\ \bar{v}_k^*(\lambda, h_k) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{komplexe FOURIER-Transformierte bzw. HANKEL-Transformierte nullter} \\ \text{Ordnung der Funktion} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yk}(r, h_k) \\ v_k^*(r, h_k) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\tau}_k(\lambda, h_k) \\ \bar{u}_k^*(\lambda, h_k) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{durch } j \ (j = i\lambda/|\lambda|; i = \sqrt{-1}) \text{ dividierte komplexe FOURIER-Transfor-} \\ \text{mierte bzw. HANKEL-Transformierte erster Ordnung der Funktion} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_k(r, h_k) \\ u_k^*(r, h_k) \end{array} \right.$$

sowie

$$\left. \begin{array}{l} u_k^* \\ v_k^* \end{array} \right\} = \frac{E^*}{h^*} \cdot \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

mit E^* als Bezugselastizitätsmodul und h^* als Bezugsdicke.

Im Falle vollkommenen Haftens aller Schichten erhält man zwischen „Anfangsvektor“ und „Endvektor“ des aus N Schichten bestehenden Körpers die Beziehung

$$\mathbf{r}_N(\lambda) = \mathfrak{U}_N(\lambda) \cdot \mathfrak{U}_{N-1}(\lambda) \dots \mathfrak{U}_2(\lambda) \cdot \mathfrak{U}_1(\lambda) \cdot \mathbf{r}_0(\lambda) = \mathfrak{U}(\lambda) \mathbf{r}_0(\lambda)$$

(mit $\mathfrak{U}(\lambda)$ als Übertragungsmatrix), welche vier Gleichungen zwischen den acht Komponenten der beiden Zustandsvektoren an den Rändern des Körpers repräsentiert. Vier davon sind durch die Randbedingungen festgelegt, die übrigen vier können dann errechnet werden.

Im Falle vollkommenen Haftens einzelner Schichten und vollkommener Reibungsfreiheit zwischen den restlichen kommen n neue Unbekannte (nämlich Sprünge der Tangentialverschiebungen \bar{u}_i^* an den reibungsfreien Übergängen) und ebenso viele neue Bedingungsgleichungen (nämlich $\bar{\tau}_i = 0$ an den reibungsfreien Übergängen) hinzu, so daß ein Gleichungssystem von $4 + n$ Gleichungen mit $4 + n$ Unbekannten zu lösen ist.

Liegt jedoch der Fall verschwindender Reibung zwischen allen Schichten vor, so eliminiert man zweckmäßig die Verschiebungen \bar{u}_k^* und erhält wegen $\bar{\tau}_k = 0$ eine zweireihige Feldmatrix $\mathfrak{B}_k(\lambda)$ und den reduzierten Zustandsvektor

$$\mathfrak{B}_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{yk}(\lambda, h_k) \\ \bar{v}_k^*(\lambda, h_k) \end{pmatrix}.$$

Die Beziehung

$$\mathfrak{B}_N(\lambda) = \mathfrak{B}_N(\lambda) \cdot \mathfrak{B}_{N-1}(\lambda) \dots \mathfrak{B}_2(\lambda) \cdot \mathfrak{B}_1(\lambda) \cdot \mathfrak{B}_0(\lambda)$$

liefert dann zwei Gleichungen zwischen den vier Komponenten der beiden Zustandsvektoren an den Rändern des Körpers, von denen zwei auf Grund der Randbedingungen vorgegeben und die übrigen zwei daraus zu errechnen sind.

Aus dem Zustandsvektor \mathbf{r}_0 bzw. \mathfrak{B}_0 kann man alle anderen durch Matrizenmultiplikation ermitteln. Um zu den wirklichen Spannungen und Verschiebungen zu kommen, hat man am Schluß die Rücktransformation vorzunehmen. Das Problem eines senkrecht zur (ebenen) Berandung beliebig inhomogenen Körpers läßt sich durch Zerlegung desselben in Einzelschichten und Betrachtung des Haftfalles erledigen.

Für den gleichmäßig und reibungsfrei geschichteten Körper gelingt die Herleitung einer geschlossenen Lösung. Die Lösung der Differenzengleichung $\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B} \mathfrak{B}_{k-1}$ lautet nämlich

$$\mathfrak{B}_k = B_1 \mathfrak{p}_1 z^k + B_2 \mathfrak{p}_2 z^{-k}$$

mit

$$\mathfrak{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \end{pmatrix},$$

$$b = \frac{2(1 - \nu^2)}{\lambda h} \cdot \frac{\sin \lambda h}{\sqrt{\sin^2 \lambda h - (\lambda h)^2}}; \quad z = \frac{\lambda h + \sin \lambda h \cdot \cos \lambda h + \sin \lambda h \cdot \sqrt{\sin^2 \lambda h - (\lambda h)^2}}{\sin \lambda h + \lambda h \cos \lambda h}$$

und B_1, B_2 als Konstanten.

Speziell ergibt sich daraus für den am Rand mit einer Linienlast P_0^* ($\bar{\sigma}_{y_0} = -P_0^*/\sqrt{2\pi}$) bzw. Einzelkraft P_0 ($\bar{\sigma}_{y_0} = -P_0/2\pi$) beanspruchten gleichmäßig geschichteten Halbraum nach Rücktransformation

$$\sigma_{yk}(r, h_k) = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{P_0^*}{\pi h} \\ \frac{P_0}{2\pi h^2} \end{array} \right\} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda h + \sin \lambda h \cos \lambda h + \sin \lambda h \sqrt{\sin^2 \lambda h - (\lambda h)^2}}{\sin \lambda h + \lambda h \cos \lambda h} \right]^{-k} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[(\lambda h) \frac{r}{h} \right] \\ \lambda h J_0 \left[(\lambda h) \frac{r}{h} \right] \end{array} \right\} d(\lambda h)$$

(J_0 BESSELSche Funktion nullter Ordnung).

Eine ausführlichere Darstellung erscheint in einem gesonderten Aufsatz. Die Behandlung desselben Gegenstandes ohne Verwendung des Matrizenkalküls ist in zwei anderen Arbeiten des Verf. gegeben [1], [2]. Wegen der Gleichförmigkeit des Rechnungsablaufes bei beliebig vorgegebenen Schichten eignet sich die Methode der Übertragungsmatrizen vorzüglich für den Einsatz von digitalen Rechenautomaten.

Literatur

- [1] H. BUFLER, ZAMM 41 (1961), S. 158—180 (ebenes Problem).
 [2] H. BUFLER, Ing.-Arch. 30 (1961) (axialsymmetrisches Problem).

Anschrift: Privatdozent Dr. H. BUFLER, München-Pasing, Ludwig-Thoma-Str. 1

Reihenansätze zur Lösung von Plattenproblemen

VON ERNST GIENCKE

Platten- und Scheibenprobleme lassen sich in einfacher Weise mit dem FOURIER-Ansatz

$$w(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

lösen, wenn zwei gegenüberliegende Ränder ($y = \text{const}$) gelenkig gelagert sind (Bild 1). Dieser Ansatz erfüllt die Bedingungen der gelenkigen Lagerung an den Seitenrändern und überführt die partielle Plattengleichung, [1],

$$L[w] \equiv B_y W'''' + 2C w'''' + B_x w'''' = p \quad \dots \dots \dots (1)$$

(für jedes n) in eine gewöhnliche Differentialgleichung nach x . Bei Platten mit kleinem Seitenverhältnis b/l verläuft die Biegelinie in y -Richtung sinusförmig (Bild 1a), so daß die FOURIER-Reihen hierfür gut konvergieren. Platten

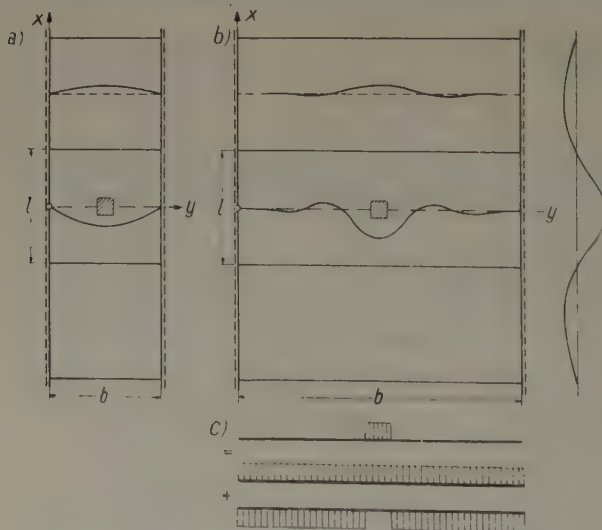


Bild 1. Einfluß des Seitenverhältnisses auf die Biegefläche

mit großem Seitenverhältnis aber verhalten sich schon fast wie Plattenstreifen (Bild 1b). In der Nähe der Last bildet sich eine tiefe Mulde aus, die nach der Seite schnell abklingt. Eine FOURIER-Entwicklung dieser Biegelinie muß schlecht konvergieren, [2]. Anders ist es, wenn man in x -Richtung entwickeln würde, da sich hier wieder ein glatter Verlauf einstellt, der sich gut in eine Reihe entwickeln läßt.

Gut konvergierende Reihen erhält man also nur dann, wenn man in der kurzen Richtung, der Haupttragrichtung der Plattenfelder, entwickelt, d. h. bei Platten mit großem Seitenverhältnis b/l , die in der Praxis häufig vorkommen, die Durchbiegung in der Form

$$w(x, y) = \sum_m W_m(y) \varphi_m(x) \quad \dots (2)$$

ansetzt.

Bei einer an den Rändern $x = \text{const}$ gelenkig gelagerten Platte geht das ohne weiteres, dagegen erhebt sich bei einer Durchlaufplatte sofort die Frage, nach welchen Funktionen φ man entwickeln soll. Der FOURIER-Ansatz wird unbrauchbar, da er die Durchlaufwirkung nicht erfaßt. Von den Funktionen φ müssen wir ja verlangen, daß sie die Randbedingungen an den

Rändern $x = \text{const}$ erfüllen und die partielle Plattengleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung nach y überführen. Außerdem sollten sie weitgehend orthogonal sein, damit man die Rechnung für jedes Glied getrennt durchführen kann. Da es leider keine Funktionen gibt, die alle Forderungen erfüllen, müssen wir uns nach einer guten Näherung umsehen.

Dazu betrachten wir zwei Sonderfälle, nämlich die Platte ohne Torsionssteifigkeit ($C = 0$) und die Platte ohne Querbiegesteifigkeit ($B_y = 0$), die beide große praktische Bedeutung haben. Zur Auffindung der Entwicklungsfunktionen genügt es, die homogene Gleichung $L[w] = 0$ zu untersuchen. Nach Einführung des φ -Ansatzes und Trennung der Veränderlichen ergeben sich hieraus die Gleichungen für φ

$$\left. \begin{array}{l} C = 0 \\ \varphi_m'''' - \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 \varphi_m = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} B_y = 0 \\ \varphi_m'''' + \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^2 \varphi_m'' = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3a, b).$$

Im Falle $C = 0$ ist das die Gleichung des schwingenden Balkens und im Falle $B_y = 0$ die des Knickstabes. Wenn man den φ -Ansatz (2) in die vollständige Plattengleichung (1) einsetzt, ergibt sich eine Gleichung, in der alle Glieder der Reihe auftreten:

$$\sum_m (B_y W_m'''' \varphi_m + 2 C W_m'' \varphi_m'' + B_x W_m \varphi_m''') = p \quad | \quad \int \dots \varphi_n dx.$$

Wir wollen aber nach Möglichkeit für jedes Glied der Reihe eine getrennte Gleichung haben. Dazu multiplizieren wir diese Gleichung mit einer beliebigen Funktion φ_n und integrieren über x . D. h. wir wenden das Prinzip der virtuellen Verrückungen an, denn φ_n ist nichts anderes als eine virtuelle Verrückung δw . Wegen der Orthogonalitätsrelationen ($m \neq n$)

$$\int \varphi_m \varphi_n dx = 0 \quad | \quad \int \varphi_m'' \varphi_n dx = 0 \quad \dots \dots \dots (4a, b)$$

fallen (bei Verwendung der „Balkenfunktionen“) in den beiden Biegetermen alle Glieder bis auf das n -te heraus. Nur im Torsionsterm bleiben alle Glieder stehen, weil die Eigenfunktionen des schwingenden Balkens mit ihren zweiten Ableitungen nicht orthogonal sind. Bei Verwendung der Knickstabfunktionen bleiben dagegen alle Glieder im Querbiegeterm stehen:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{l}{\alpha_n}\right)^4 B_y W_n'''' - 2 \left(\frac{l}{\alpha_n}\right)^2 \sum_m C_{mn} W_m'' + B_x W_n = \frac{p_n l^4}{\alpha_n^4} \\ \left(\frac{l}{\alpha_n}\right)^4 \sum_m B_{y,mn} W_m'''' - 2 \left(\frac{l}{\alpha_n}\right)^2 C W_n'' + B_x W_n = \frac{p_n l^4}{\alpha_n^4} \end{array} \right\} (5a, b).$$

mit

$$\bar{\varphi}_n = - \left(\frac{l}{\alpha_n}\right)^2 \varphi_n''$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{mn} = \left(\frac{\alpha_m}{\alpha_n}\right)^2 C \frac{\int \bar{\varphi}_m \varphi_n dx}{\int \varphi_n^2 dx} \\ B_{y,mn} = B_y \frac{\int \varphi_m \varphi_n dx}{\int \varphi_n \varphi_n dx} \end{array} \right|$$

Für die Belastungskoeffizienten gilt

$$\left. \begin{array}{l} p_n = \frac{\int p \varphi_n dx}{\int \varphi_n^2 dx} \\ p_n = \frac{\int p \varphi_n dx}{\int \bar{\varphi}_n \varphi_n dx} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6a, b).$$

Nur bei den Funktionen $\sin \frac{n \pi x}{l}$, die — für die gelenkig gelagerte Platte — als Sonderfall hierin enthalten sind, entkoppeln sich die Gleichungen völlig, [3]:

$$\left(\frac{l}{n \pi}\right)^4 B_y W_n'''' - 2 \left(\frac{l}{n \pi}\right)^2 C W_n'' + B_x W_n = \frac{p_n l^4}{(n \pi)^4} \quad \dots \dots \dots (7).$$

Man kann die Gleichungen (5) aber auch bei andern Plattenaufgaben entkoppeln. Z.B. genügt es bei den torsionsweichen Fahrbahnplatten im Stahlbrückenbau, für die man am zweckmäßigsten Gleichung (5a) benutzt, wenn man im Torsionsterm nur das wesentliche, nämlich das n -te Glied, berücksichtigt und die anderen streicht, wie in [4] gezeigt ist. Bei einer Platte mit geringer Querbiegesteifigkeit geht man von Gleichung (5b) aus und streicht darin alle Koppelglieder. In beiden Fällen erhält man eine Gleichung für $W_n(y)$, die die gleiche Form wie (7) hat. D. h. wir können alle bekannten Lösungen für die gelenkig gelagerte Platte übernehmen, müssen nur $n \pi$ durch α_n ersetzen und die Belastung nach den Funktionen φ entwickeln.

Aber auch isotrope Platten kann man näherungsweise so berechnen. Wenn es sich um eine Durchlaufplatte handelt, benutzt man am zweckmäßigsten die Eigenfunktionen des Knickstabes, da hierbei im wesentlichen die Biegesteifigkeit in x -Richtung und die Torsionssteifigkeit tragen.

Bei starr eingespannten Platten dagegen ergeben die Funktionen des schwingenden Balkens bessere Ergebnisse, denn in der Nähe eingespannter Ränder spielt die Torsionssteifigkeit eine untergeordnete Rolle.

Bei Flächenlasten läßt sich die Konvergenz, besonders für die Momente (unter der Last), wesentlich verbessern. Dazu ordnet man die Last am zweckmäßigsten, wie in Bild 1c, um. Die Art der Lagerung an den Rändern $x = \text{const}$ spielt keine Rolle. Für die erste Teillast wirkt die Platte wie ein Balken. Die dazugehörige Lösung berechnet man direkt nach der Balkentheorie (nicht etwa durch Auswerten der Reihe). Die Lösung für die zweite Teillast gibt unmittelbar die Plattenwirkung wieder, sie konvergiert normalerweise so schnell, daß man bei den Momenten höchstens 1 bis 2 Glieder braucht. In diesem Falle wäre es auch ohne großen Aufwand möglich, die gekoppelten Gleichungen (5a, b) zu lösen.

Häufig laufen die Platten über sehr viele Felder durch. Bei der Bestimmung der Entwicklungsfunktionen für solche Platten tritt eine gewisse Schwierigkeit auf, weil die Spannungen

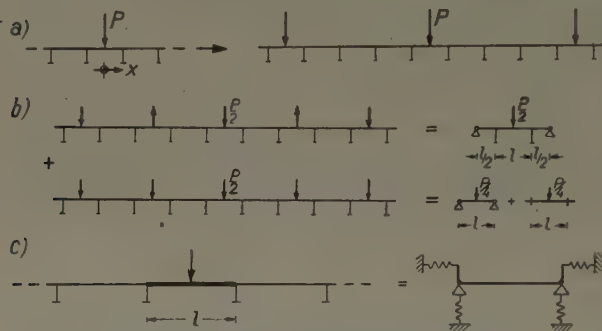


Bild 2. Systeme für lange Durchlaufplatten

in einer Durchlaufplatte von der Laststelle aus schnell abklingen, die Funktionen φ , die sich periodisch über alle Plattenfelder ausbreiten, dagegen nicht. Man kann sich auf zweierlei Weise helfen. Einmal, indem man an Stelle der ursprünglichen Last ein periodisches Lastsystem einführt (Bild 2a), bei dem die Nachbarlasten den Spannungszustand in der Nähe der ursprünglichen Last nicht mehr beeinflussen. D. h. man belastet beispielsweise jedes vierte Feld. Wenn man diese Belastung weiter in symmetrische und antisymmetrische Lastgruppen zerlegt, ergeben sich schließlich die drei Teilsysteme nach Bild 2b.

Es ist aber umständlich, für einen Lastfall drei Systeme durchzurechnen. Um eine zweite, bessere, Möglichkeit zu finden, betrachten wir das Verhalten der einzelnen Felder (Bild 1b). Das belastete Feld wird in unmittelbarer Nähe der Last kräftig verformt, wobei alle Steifigkeiten der Platte beansprucht werden. In den Außenfeldern dagegen ist der Verlauf der Biegelinie so glatt, daß dort im wesentlichen nur noch die Biegesteifigkeit B_x trägt. Wir werden daher gute Ergebnisse erwarten können, wenn wir in diesen Feldern die Torsions- und Querbiegesteifigkeit vernachlässigen. Dadurch wird auch die Bestimmung der Funktionen φ einfacher, denn wo die Torsions- und Querbiegesteifigkeit vernachlässigt wird, braucht bei den Balkenfunktionen keine Masse und bei den Knickstabfunktionen keine Druckkraft angenommen zu werden. Für dieses vereinfachte System erhält man abklingende Eigenfunktionen. Da nur die mit „Masse“ belegten oder auf „Druck“ belasteten Felder eine Tendenz zum Ausbiegen haben, beschränken sich die Funktionen φ im wesentlichen auf diese Felder und klingen in die unbelasteten Öffnungen schnell ab. Die Wirkung dieser Felder kann durch eine elastische Einspannung und Lagerung erfaßt werden, wie in Bild 2c angegeben ist. Die wichtigsten Knickstabfunktionen für die Berechnung von Durchlaufplatten sind in [5] angegeben.

Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß man auch schubweiche Platten auf dem gleichen Wege berechnen kann, wenn man die Eigenfunktionen des schubweichen Balkens oder Knickstabes benutzt, [6]. Auch für die Berechnung von Scheiben eignet sich der φ -Ansatz, wie in [7] gezeigt ist; dabei muß man nur auf die Zuordnung zwischen den Randbedingungen der Scheibe und des Knickstabes (oder des schwingenden Balkens) achten.

Literatur

- [1] M. T. HUBER, Über die genaue Berechnung einer orthotropen Platte, Bauing. 6 (1925).
- [2] G. FISCHER, Beitrag zur Berechnung kreuzweise gespannter Fahrbahnplatten im Stahlbrückenbau, Berlin 1952, W. Ernst u. Sohn.
- [3] K. GIERMANN, Flächentragwerke, 3. Aufl., Wien 1954, Springer-Verlag.
- [4] E. GIENCKE, Die Berechnung von durchlaufenden Fahrbahnplatten, Stahlbau 27 (1958), S. 297—98.
- [5] E. GIENCKE, Die Berechnung von Hohlrippenplatten, Stahlbau 29 (1960), S. 1/11, 47/59.
- [6] E. GIENCKE, Einfluß der Schubweichheit der Längsrippen und Querträger auf die Momente in einer orthotropen Platte, Stahlbau 29 (1960), S. 351/360.
- [7] E. GIENCKE, Zur Berechnung der elastischen Wärmespannungen in Tragflügeln, Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) 1960.

Anschrift: Dozent Dr.-Ing. E. GIENCKE, Technische Hochschule Darmstadt, Institut für Luftfahrttechnik

Theorie dreidimensionaler Setzungsvorgänge in Tonschichten^{*)}

Von G. HEINRICH und K. DESOYER

Ausgehend von einer Erweiterung der eindimensionalen Setzungstheorie auf dreidimensionale Vorgänge wurde vor allem der zeitliche Verlauf der Setzung einer Tonschicht großer Mächtigkeit bei zylindersymmetrischer Belastung ihrer Oberfläche behandelt. Es ergibt sich, im Gegensatz zur eindimensionalen Theorie, bereits nach dem Aufbringen der Belastung eine wesentliche Anfangsdeformation, an die sich der eigentliche Setzungsvorgang anschließt. Für die Belastung durch eine konstante Flächenlast und eine starre Platte wurden die Anfangsdeformationen und die zeitlichen Verläufe der Setzungen berechnet und durch Schaubilder dargestellt. Die Arbeit wird demnächst unter dem obigen Titel im Ingenieur-Archiv erscheinen.

Anschriften: o. Prof. Dr. G. HEINRICH und Doz. Dr. K. DESOYER, Wien IV., Karlsplatz 13, Technische Hochschule, I. Institut für Mechanik

^{*)} Vorgetragen von K. DESOYER.

Über die dünnwandige Torusschale unter Innendruck

Von PETER F. JORDAN^{*)}

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit einem Problem, das in der Technik zunehmend an Bedeutung gewinnt, dessen analytische Behandlung aber bisher blockiert war durch ein scheinbares Paradox in der Theorie zweifach zusammenhängender dünnwandiger Umdrehungsschalen. Anschaulich illustriert ist dies Problem durch die Steifigkeit, die ein Autoschlauch dadurch gewinnt, daß man ihn aufpumpt. Man ist instinktiv geneigt, anzunehmen, diese Steifigkeit — etwa die Fähigkeit des aufgepumpten Schlauches, axial gerichtete Lasten zwischen Innenring und Außenring zu übertragen — beruhe auf einem Zusammenspiel zwischen dem Innendruck und den durch ihn hervorgerufenen Membranspannungen in der Schlauchwand, und daß die Biegesteifigkeit des Schlauchmaterials an diesem Zusammenspiel keinen (bzw. keinen wesentlichen) Anteil habe. In Widerspruch zu dieser instinktiven Interpretation steht die in der Literatur übliche Schlußfolgerung (z. B. [1], [2] und [3]), daß für eine gewisse Klasse von zweifach zusammenhängenden Schalen, zu denen der vollständige Kreistorus als typisches Beispiel gehört, keine zulässige Membranlösung existiere, daß vielmehr eine gewisse Biegesteifigkeit der Schalenwand für das Zustandekommen einer physikalisch sinnvollen Lösung notwendig sei.

Dieser Schlußfolgerung liegt folgender Tatbestand zugrunde: wir betrachten das achsensymmetrische Problem einer Umdrehungsschale, deren Meridianschnitt beschrieben sei durch eine Funktion $y(x)$, wobei die x -Koordinate normal zur Umdrehungsachse gerichtet sei, die y -Koordinate in Achsenrichtung. Der Schnitt $y(x)$ enthalte einen Scheitelpunkt x_s , d. i., einen Punkt, für den $dy/dx = 0$ ist. Wir setzen ferner voraus, daß x_s in einem „freien“ Bereich der Schale liege, d. h., daß in einer gewissen Umgebung von x_s außer dem Innendruck keine weiteren äußeren Kräfte angreifen. Vernachlässigen wir in diesem Problem die Biegesteifigkeit der Schale, so sind die in dem „freien“ Bereich entstehenden Membrankräfte bereits vollständig gegeben durch die Funktion $y(x)$; insbesondere ist es nicht möglich, sobald $y(x)$ gegeben ist, irgendwelche zusätzlichen Randbedingungen zu erfüllen.

Eine implizite Randbedingung ist aber, daß die Verformung, die sich ergibt, wenn man die irgendwie berechneten Membrankräfte auf die unverformte Schale $y_0(x)$ anwendet, physikalisch sinnvoll sein muß. Es ergibt sich nun Folgendes: berechnet man die Membrankräfte mit Hilfe der linearen Theorie, d. h., indem man die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Innendruck und Membrankräften an der unverformten Schale $y_0(x)$ erfüllt, und benutzt man ferner zur Berechnung der durch diese Membrankräfte, N_ϕ^0 und N_θ^0 , hervorgerufenen Verformungen die klassische lineare Deformationstheorie (die voraussetzt, daß sowohl die Verschiebungen wie auch deren Ableitungen klein von der Größenordnung der Dehnungen ε seien), so findet man im Falle einer zweifach zusammenhängenden Schale (allgemeiner: falls nicht der Scheitelpunkt x_s auf der Umdrehungsachse liegt) eine Singularität erster Ordnung in der Neigung der Tangente an die verformte Schale: $dy/dx \sim 1/(x_s - x)$, und findet dementsprechend eine logarithmische Singularität in der Verschiebung in achsialer Richtung ([3] S. 100).

^{*)} Principal Scientist, The Martin Company, Baltimore (Maryland, USA) Division.

Dieses Ergebnis ist physikalisch sinnlos; der oben angeführte Schluß, daß eine gewisse Biegefestigkeit der Schalenwand notwendig sei, um die aufgetretene Singularität auszugleichen, liegt nahe. Aus diesem Schluß ergibt sich ein technisch wichtiges Problem: träte wirklich bei der idealisierten Membranschale eine Verformungssingularität auf, dann müßte doch bei einer Schale zwar endlicher, aber doch geringer Schalendicke am Scheitel eine örtliche Verformung auftreten derart, daß möglicherweise die Festigkeit der Gesamtschale merklich beeinträchtigt würde. Merkwürdigerweise ist keine Untersuchung dieser Fragestellung bekannt. Zwar ist das erforderliche Gleichungssystem mehrfach aufgestellt worden [1], [2], aber seine Lösung war erschwert eben durch den Tatbestand, daß keine erste Näherungslösung in Form einer Membranlösung vorlag [2].

Andererseits ist der Schluß, daß keine Membranlösung existiere, keineswegs unausweichlich. Es gründet sich auf ein Ergebnis, das auf zwei (oben angeführten) Näherungsansätzen beruht: (1) Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen an der unverformten Schale, (2) Annahme linearer Verschiebungen. Von diesen ist (2) bereits durch die Singularität im Ergebnis widerlegt. In der Tat: berechnet man die Verformungen, die sich aus N_0^x und N_0^y (also aus der Näherungsannahme (1)) ergeben, mit einer exakten Methode, so ergeben sich am Scheitelpunkt x_s Schalenneigungen dy/dx von der Größenordnung $\sqrt{\epsilon}$, d. h., es ergeben sich zwar keine linearen, aber doch endliche Verschiebungen.

An dieser Stelle kann weder die erwähnte exakte Deformationstheorie, noch die nicht-lineare Membrantheorie, die den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung bildet, im einzelnen beschrieben werden. Hingewiesen sei auf die vorläufige Mitteilung [4]; eine vollständige Darstellung an anderer Stelle ist geplant. Die exakte Deformationstheorie ist nicht etwa komplizierter, sondern ist im Gegenteil einfacher als die klassische lineare Deformationstheorie (für den gegebenen Problembereich) insofern, als sich die verformte Schale $y(x)$ aus den Hauptdehnungen ϵ_ϕ und ϵ_θ direkt durch Quadratur ergibt, ohne den Umweg über eine Differentialgleichung¹⁾.

Die exakt berechneten Verformungen, die sich aus dem linearen Ansatz (1) ergeben, verletzen noch zwei physikalische Bedingungen, nämlich die Kontinuität sowohl der Verschiebungen selbst wie auch der Schalentangenten. Nach dem oben Gesagten besteht keine andere Möglichkeit, im Rahmen einer Membrantheorie irgendwelche Bedingungen zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen, als die Schalenform $y(x)$ selbst zu ändern. Dementsprechend wird es erforderlich, die Gleichgewichtsbedingungen an der verformten Schale zu erfüllen, das heißt aber, eine nichtlineare Schalentheorie zu entwickeln. Nach [6] ist damit automatisch die Möglichkeit gegeben, eine weitere Randbedingung zu erfüllen. Der erforderliche weitere Freiheitsgrad ergibt sich im vorliegenden Problem aus der Möglichkeit, den Scheitelpunkt der verformten Schale in x -Richtung zu verschieben (d. i., der Punkt x_s der unverformten Schale muß nicht notwendigerweise in den Punkt x_s der verformten Schale übergehen). Damit wird die Existenz einer zulässigen Membranlösung wahrscheinlich.

Der ausführliche Existenznachweis durch numerische Berechnung mehrerer Membranlösungen ist in [4] durchgeführt für den Fall des Kreistorus ohne irgendwelche zusätzliche Belastung. Ein lineares Elastizitätsgesetz ist dabei vorausgesetzt. Die nichtlineare Analysis ist verhältnismäßig unkompliziert (a) wegen der Einfachheit des oben erwähnten Deformationsgesetzes, (b) infolge der Wahl einer geeigneten Darstellung der Schalenform $y(x)$. Sei φ der örtliche Tangentenwinkel an $y(x)$; dann nimmt die Funktion

$$F(x) = \frac{x_s - x}{\sin \varphi}$$

bei geeigneter Definition der Koordinate x den konstanten Wert $F(x) \equiv 1$ an in dem Falle, daß $y(x)$ ein Kreis ist. Für die (unbekannte) verformte Schale schreiben wir daher

$$F(x) = 1 - \kappa f(x); \quad f(x) = O(1),$$

wobei κ eine Konstante von der Größenordnung ϵ ist. Die Funktion $f(x)$ wird als unbekannte Funktion gewählt. Es erweist sich als notwendig, zuzulassen, daß die Ableitungen von $f(x)$ nach x nicht, wie $f(x)$ selbst, von der Größenordnung 1 bleiben, sondern (in der Nähe des Scheitels x_s) Werte von der Größenordnung $1/\kappa$ annehmen. Im Übrigen lassen sich aber die üblichen Linearisierungsmethoden (im mathematischen Sinne!) weitgehend anwenden; sie führen zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für $f(x)$, die in $f(x)$ linear ist (aber natürlich nichtlinear ist in der Drucklast). Bemerkenswert ist, daß diese Differentialgleichung unabhängig ist von der Poissonschen Querkontraktionszahl ν .

¹⁾ Die in [4] entwickelte exakte Methode ist im Prinzip bereits enthalten in einer Reihe von Arbeiten von E. REISSNER über die biegesteife Schale, siehe etwa [5].

Einige abschließende Bemerkungen:

Während dem linearen Ergebnis N_ϕ^0 , N_θ^0 zufolge die Drehung $\beta = \varphi - \varphi_0$ des Schalenelementes Werte von der Größenordnung $\sqrt{\varepsilon}$ annimmt, ist die wirklich auftretende Drehung von der Größenordnung ε . Die Schale „zieht es vor“, sich so zu verformen, daß die Drehung β klein bleibt.

Unterschiede zwischen den aus der linearen Theorie sich ergebenden Spannungen σ_ϕ^0 und σ_θ^0 und den wirklichen Spannungen σ_ϕ und σ_θ sind wesentlich nur bezüglich σ_θ . Da σ_ϕ die für den Entwurf maßgebliche Spannung ist, ergeben sich aus der exakten Theorie keine technisch wesentlichen zusätzlichen Schalenspannungen. Das Gleiche gilt übrigens in etwa auch, wenn axial gerichtete äußere Lasten zwischen Innenring und Außenring übertragen werden sollen. Solange solche Lasten ausreichend klein sind gegenüber dem Innendruck, derart, daß σ_θ nirgendwo negativ wird, wird σ_ϕ nur wenig durch solche Lasten beeinflusst, und σ_θ wird nirgendwo wesentlich größer als σ_ϕ .

Durch die Bereitstellung der Membranlösung wird ein einfacher Zugang zu dem bisher noch unbehandelten Problem der vollständigen Torusschale mit endlicher Biegesteifigkeit möglich. Die aus der Membranlösung sich ergebenden Verformungen bedingen Biege- und Querspannungen, die sich in den vollständigen Schalengleichungen als zusätzliche Druck- und Tangentiallasten an der ursprünglichen Membranschale interpretieren lassen, und die dementsprechend zu zusätzlichen inhomogenen Gliedern in der linearen Differentialgleichung für $f(x)$ führen. Damit ist ein numerisches Iterationsverfahren gegeben.

Die sich so in erster Näherung ergebenden Biegespannungen sind proportional dem Verhältnis Schalendicke d zu Meridianradius r . Sie erreichen die Größe der aus der nichtlinearen Theorie sich ergebenden Korrekturen an den Membranspannungen aus der linearen Theorie, falls $d/r \approx 1/70$ wird. Für Schalen dieser Dicke erscheint also Iteration angezeigt. Andererseits erscheint Iteration unnötig in dem technisch wichtigen Anwendungsbereich $d/r \approx 1/1000$.

Literatur

- [1] W. R. DEAN, The Distortion of a Curved Tube Due to Internal Pressure, Phil. Mag. 28 (1939), p. 452—464.
- [2] V. V. NOVOZHILOV, The Theory of Thin Shells (Übersetzg. a. d. Russ.), Groningen 1959, P. Noordhoff Ltd.
- [3] W. FLÜGGE, Stresses in Shells, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960, Springer-Verlag.
- [4] P. F. JORDAN, Stresses and Deformations of the Thin-Walled Pressurized Torus, Inst. Aerospace. Sci., Paper No. 61—14, Annual Meeting, New York 1961. Erscheint demnächst im Journ. Aerospace Sci.
- [5] E. REISSNER, On the Theory of Thin Elastic Shells, H. Reissner Anniversary Vol., S. 231—247, Ann Arbor, Mich., 1949, J. W. Edwards.
- [6] E. BROMBERG and J. J. STOCKER, Non-linear Theory of Curved Elastic Sheets, Quart. Appl. Math. 3 (1945), p. 246—265.

Anschrift: Dr. PETER F. JORDAN, 207 Morris Ave., Lutherville, Maryland, USA

Plastizitätsbedingung und Formänderungsgesetz bei großen plastischen Formänderungen mit Werkstoffverfestigung

Von TH. LEHMANN

Neben den werkstoffunabhängigen Grundgleichungen (Verträglichkeitsbedingungen, Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen und für die Spannungsinkremente, thermodynamische Hauptsätze) bestimmen die werkstoffabhängige Plastizitätsbedingung und das werkstoffabhängige Formänderungsgesetz das plastische Verhalten eines Werkstoffes. Die Plastizitätsbedingung läßt sich physikalisch verschieden interpretieren. Ebenso kann man bei der Formulierung der Formänderungsgesetze von verschiedenen physikalischen Vorstellungen ausgehen.

Es zeigt sich nun, daß sich aus den werkstoffunabhängigen Grundgleichungen gewisse einschränkende Bedingungen für den Ansatz der werkstoffabhängigen Gesetze ergeben. Ferner sind Plastizitätsbedingung und Formänderungsgesetz je nach der Interpretation durch verschiedene Bedingungen miteinander verknüpft. Diese Bedingungen müssen bei der Formulierung der werkstoffabhängigen Gesetze beachtet werden, wenn Widersprüche vermieden werden sollen.

Eine ausführliche Darstellung der hiermit zusammenhängenden Fragen erscheint demnächst an anderer Stelle.

Anschrift: Dozent Dr.-Ing. TH. LEHMANN, Hannover, Techn. Hochschule, Welfengarten 1

Eine neue Reihenentwicklung zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen des Typus $y^{(n)}(x) = f(x, y)$

Von H. LEIPHOLZ

Die Reihenentwicklung von TAYLOR ist seit langem zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen gebräuchlich. In neuerer Zeit wird auch häufig ein von S. HERMITE stammendes Interpolationsverfahren

$$\sum_{v=0}^k (-1)^v y^{(v)}(b) \frac{h^v}{v!} \frac{\binom{k}{v}}{\binom{k+m}{v}} = \sum_{v=0}^m y^{(v)}(a) \frac{h^v}{v!} \frac{\binom{m}{v}}{\binom{k+m}{v}} + R_{k,m} \quad (1)$$

$$R_{k,m} = \frac{(-1)^{k+m} k! m!}{(k+m)! (k+m+1)!} y^{(k+m+1)}(\xi) (b-a)^{k+m+1}; \quad h = b-a \quad (2)$$

angewendet, das gegenüber dem TAYLORSchen Verfahren den Vorteil der größeren Genauigkeit, aber den Nachteil des größeren Arbeitsaufwandes hat, denn in (1) kommen außer dem unbekannten Wert $y(b)$ auch noch mehrere unbekannte Ableitungen von $y(x)$ an der Stelle $x = b$ vor, so daß man sich zusätzliche Gleichungen zur Elimination der zusätzlichen Unbekannten verschaffen muß.

Es läßt sich aber für Differentialgleichungen des Typus

$$y^{(n)}(x) = f(x, y) \quad (3)$$

eine neue Reihenentwicklung angeben, die einen kleineren Fehler als das TAYLORSche Verfahren und einen geringeren Arbeitsaufwand als das HERMITESche Verfahren hat, weil in dieser neuen Reihenentwicklung, so wie bei der TAYLORSchen, ebenfalls nur eine Unbekannte vorkommt.

Differentialgleichungen des genannten Typus kommen für $n = 2$ in der Praxis als Bewegungsgleichungen von konservativen linearen oder nichtlinearen freien oder erzwungenen Schwingungen, ungedämpften parametererregten Schwingungen, linearen gedämpften Schwingungen, deren Normalform von dem genannten Typus ist, usw. vor.

Da sich die neue Reihenentwicklung auch zur Berechnung von Eigenwerten λ eignet, kann man noch Gleichungen der Art $y^{(n)} = f(\lambda, x, y)$ in die Betrachtungen einbeziehen, wie sie bei Schwingungen von Saiten und Stäben, Knicken und Kippen von Trägern usw. für $n = 2$ auftreten. Bei bestimmter Art der Randbedingungen kann man hier ebenfalls durch die neue Reihe Vorteile haben.

Die neue Reihenentwicklung lautet:

$$y(b) = \sum_{\kappa=0}^{x=n-1} y^{(\kappa)}(a) \frac{(b-a)^\kappa}{\kappa!} + \frac{1}{(n+v)!} \left\{ \sum_{\omega=0}^{\omega=v} (-1)^\omega \binom{n+\omega-1}{\omega} \left[\frac{d^{(v-\omega)} P(a, b, x)}{dx^{v-\omega}} y^{(n+\omega)}(x) \right]_a^b \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=1}^{x=n-1} \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=v} (-1)^{\lambda+1} \binom{n-\kappa-1+\lambda}{\lambda} \frac{d^{(v+\kappa-\lambda)} P(a, b, a)}{dx^{v+\kappa-\lambda}} y^{(n+\lambda)}(a) \right] \frac{(b-a)^\kappa}{\kappa!} \right\} + R_v \quad (4)$$

oder

$$y(a_{n+1}) = \sum_{\kappa=0}^{x=n-1} y^{(\kappa)}(a_{n-\kappa}) \int_{a_n}^{a_{n+1}} \int_{a_{n+1-\kappa}}^x dx^\kappa \\ + \frac{1}{(n+v)!} \left\{ \sum_{\omega=0}^{\omega=v} (-1)^\omega \binom{n+\omega-1}{\omega} \left[\frac{d^{(v-\omega)} P(a_1 \dots a_{n+1}, x)}{dx^{v-\omega}} y^{(n+\omega)}(x) \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=1}^{x=n-1} \left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=v} (-1)^{\lambda+1} \binom{n-\kappa-1+\lambda}{\lambda} \frac{d^{(v+\kappa-\lambda)} P(a_1 \dots a_{n+1}, a_{n-\kappa})}{dx^{v+\kappa-\lambda}} y^{(n+\lambda)}(a_{n-\kappa}) \right] \int_{a_n}^{a_{n+1}} \int_{a_{n+1-\kappa}}^x dx^\kappa \right\} + R_v, \quad (5)$$

mit

$$R_v = \frac{(-1)^{v-1}}{(n+v)!} \left[\sum_{t=0}^{t=n-1} \binom{v+t}{v} \int_a^b (n-t) \int_a^x \frac{d^{(n-t-1)} P(a, b, x)}{dx^{n-t-1}} y^{(n+v+1)}(x) dx^{n-t} \right] \quad (6)$$

oder

$$R_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(n+\nu)!} \left[\sum_{t=0}^{n-\nu-1} \binom{n+\nu}{\nu+t} \int_{a_n}^{a_{n+1}} (n-t) \int_{a_{t+1}}^x \frac{d^{(n-t-1)} P(a_1 \dots a_{n+1}, x)}{dx^{n-t-1}} y^{(n+\nu+1)}(x) dx^{n-t} \right] \quad (7).$$

Die Formel (4) mit (6) kommt für Anfangswertprobleme, die Formel (5) mit (7) kommt für Randwert- und Eigenwertprobleme in Frage. In diesen Formeln ist $P(a, b, x)$ ein Polynom in x von der Ordnung $n + \nu$, wo n die Ordnung der Differentialgleichung und ν eine beliebige positive, ganze Zahl ist. Für $P(a_1 \dots a_{n+1}, x)$ gilt Entsprechendes:

$$P(a, b, x) = (x-a)^n (x-b)^\nu \dots \dots \dots (8),$$

$$\left. \begin{aligned} P(a_1 \dots a_{n+1}, x) &= (x-a_1)^{\sigma_1} (x-a_2)^{\sigma_2} \dots (x-a_{n+1})^{\sigma_{n+1}}, \\ \sigma_i; \text{ ganz, positiv, } \sum_i \sigma_i &= n + \nu \end{aligned} \right\} \dots \dots (9).$$

Ferner sind $\int_a^b \int_a^x f(x) dx^n$ und $\int_{a_n}^{a_{n+1}} \int_{a_1}^x f(x) dx^n$ n -fach interierte Integrale:

$$\int_a^b \int_a^x f(x) dx^n = \underbrace{\int_a^b \int_a^x \dots \int_a^x f(x) dx \dots dx}_{n\text{-mal}} \dots \dots \dots (10),$$

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} \int_{a_1}^x f(x) dx^n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \underbrace{\int_{a_1}^x \dots \int_{a_1}^x f(x) dx \dots dx}_{n\text{-mal}} \dots \dots \dots (11).$$

Tabelle

| | |
|---|--|
| $y''' = -xy,$ $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$ | $n = 3, \nu = 6, a = 0, b = 1,$ $P(a, b, x) = (x-a)^3 \cdot (x-b)^6,$ |
|---|--|

| $P^{(i)}$ an der Stelle 0: | | | | | | | | | |
|----------------------------|------|-------|--------|------------|-----------|------------|-------------|--------------|------------|
| P | P' | P'' | P''' | $P^{(IV)}$ | $P^{(V)}$ | $P^{(VI)}$ | $P^{(VII)}$ | $P^{(VIII)}$ | $P^{(IX)}$ |
| 0 | 0 | 0 | 6 | -144 | 1800 | -14 400 | 75 600 | -241 930 | 362 880 |
| $P^{(i)}$ an der Stelle 1: | | | | | | | | | |
| P | P' | P'' | P''' | $P^{(IV)}$ | $P^{(V)}$ | $P^{(VI)}$ | $P^{(VII)}$ | $P^{(VIII)}$ | $P^{(IX)}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 720 | 15 120 | 120 960 | 362 880 |

$$y'''(1) = -y(1); \quad y'''(0) = y^{(IV)}(0) = y^{(VI)}(0) = y^{(VII)}(0) = y^{(VIII)}(0) = 0; \quad y^{(V)}(0) = -2$$

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0) + y'(0) + \frac{1}{2} y''(0) \\ &+ \frac{1}{9!} \left\{ \underbrace{P^{VI} \cdot y'''}_0^1 - 3 \underbrace{P^V \cdot y^{IV}}_0^1 + 6 \underbrace{P^{IV} \cdot y^V}_0^1 - 10 \underbrace{P''' \cdot y^{VI}}_0^1 + 15 \underbrace{P'' \cdot y^{VII}}_0^1 - 21 \underbrace{P' \cdot y^{VIII}}_0^1 + 28 \underbrace{P \cdot y^{IX}}_0^1 \right. \\ &- P^{VII}(0) \cdot y'''(0) + 2 P^{VI}(0) \cdot y^{IV}(0) - 3 P^V(0) \cdot y^V(0) + 4 P^{IV}(0) \cdot y^{VI}(0) - 5 P'''(0) \cdot y^{VII}(0) \\ &\quad + 6 P''(0) \cdot y^{VIII}(0) - 7 P'(0) \cdot y^{IX}(0) \\ &\left. + \frac{1}{2} [-P^{VIII}(0) \cdot y'''(0) + P^{VII}(0) \cdot y^{IV}(0) - P^{VI}(0) \cdot y^V(0) + P^V(0) \cdot y^{VI}(0) - P^{IV}(0) \cdot y^{VII}(0) \right. \\ &\quad \left. + P'''(0) \cdot y^{VIII}(0) - P''(0) \cdot y^{IX}(0)] \right\} \end{aligned}$$

$$y(1) = 1 + \frac{1}{362\,880} \{-720 \cdot y(1) - 1728 + 10\,800 - 14\,400\} = 1 - \frac{y(1)}{504} - \frac{222}{15\,120}$$

$$y(1) = 0,983366336 \quad \longrightarrow \quad f = +4,7 \cdot 10^{-8}$$

Nach Hermite mit $k = 0$ (\equiv Taylor):
 $y(1) = 0,983333333 \quad \longrightarrow \quad f = +3305 \cdot 10^{-8}$

genauer Wert: $y(1) = 0,983366383$

Ist M eine Schranke für den Betrag von $y^{(n+\nu+1)}(x)$, so gilt für das Restglied von (4) bei Verwendung von (8)

$$|R_\nu| < \frac{n}{\nu+1} M \frac{(b-a)^{n+\nu+1}}{(n+\nu+1)!} \dots \dots \dots (12),$$

woraus man ersieht, daß für $\nu+1 > n$ die Fehlerschranke des neuen Verfahrens kleiner als die des TAYLORSchen ist.

Wegen der besonderen Form von $P(a, b, x)$ ergibt sich noch ein weiterer Vorteil gegenüber der TAYLORSchen Entwicklung: in (4) fallen alle Glieder mit $y^{(n+\nu)}$ heraus, so daß man bei Verwendung aller Ableitungen bis $y^{(n+\nu-1)}$ einen um Eins höheren Annäherungsgrad hat als bei der ebenfalls bis zum Glied mit $y^{(n+\nu-1)}$ reichenden TAYLORSchen Formel.

Der Vorteil gegenüber der HERMITESchen Entwicklung folgt aus der Voraussetzung (3) u. (8). Wegen der besonderen Form der Differentialgleichung enthält (4) dann nur die eine Unbekannte $y(b)$, während in (1) im allgemeinen n Unbekannte $y^{(\kappa)}(b)$, ($\kappa = 0, \dots, n-1$), vorkommen. Durch Verwendung von (4) spart man also Rechenarbeit.

Entsprechendes gilt für (5), das insbesondere eine gute Anpassung an vorgeschriebene Randwerte gestattet.

Kurz gesagt: die neue Reihenentwicklung hat gegenüber dem TAYLORSchen Verfahren einen kleineren Fehler bei gleichem Arbeitsaufwand und einen kleineren Arbeitsaufwand gegenüber dem genaueren HERMITESchen Verfahren.

Als Beispiel ist in der beigefügten Tabelle (S. T 93, unten) die Anwendung der Formel (4) auf ein Anfangswertproblem dargestellt, was die Durchführung des Verfahrens und seinen Vorteil hinsichtlich des Fehlers erläutern möge.

Anschrift: Dr.-Ing. HORST LEIPHOLZ, (14a) Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51

Charakteristikentheorie der verwindungsfreien axialsymmetrischen Umformung eines starrplastischen Körpers

Von HORST LIPPMANN*)

Für große Formänderungen (verschwindender elastischer Anteil) lauten die Grundgleichungen der Plastizitätstheorie (σ_{ik} = Spannungen; $\dot{\epsilon}_{ik}$ = Verzerrungsgeschwindigkeiten in orthogonalen Koordinaten)

$$F(\sigma_{ik}) = Y \quad (\text{Fließkriterium}) \dots \dots \dots (1),$$

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \varrho \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} \quad (\text{Stoffgesetz}) \dots \dots \dots (2),$$

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{Gleichgewichtsbedingungen in kartesischen Koordinaten ohne Volumenkräfte}) \dots \dots (3).$$

Y ist die sogenannte Formänderungsfestigkeit, ϱ ein Proportionalitätsfaktor und F eine invariante Funktion des Spannungstensors, für die sich hauptsächlich zwei Formen eingebürgert haben:

- a) F = elastische Schubverzerrungsenergie (v. MISES),
- b) F = maximale Schubspannung (TRESCA).

Hauptanwendungsfeld war bisher die ebene Umformung ($\dot{\epsilon}_{zz} = 0$), weil dort für drei Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} allein drei Gleichungen zur Verfügung stehen (Fließkriterium und zwei Gleichgewichtsbedingungen): Das Problem ist statisch bestimmt, wenngleich Lösungen hinterher an Hand der Kinematik zu überprüfen sind. Die drei statischen Gleichungen lassen sich auf zwei partielle lineare DGLn. erster Ordnung zurückführen, die hyperbolisch sind und ein orthogonales Charakteristikennetz (Gleitliniennetz; um 45° gegen die Hauptspannungen geneigte Richtungen) mit zwei analytisch einfachen und für beide o. g. Fließkriterien gleichartigen charakteristischen Gleichungen besitzen. Sie haben für $Y = \text{const.}$ vollständige Integrale (HENCKYSche Gleichungen) in geschlossener Form. Vgl. z. B. das Lehrbuch von HILL [1].

Der technisch ebenso wichtige axialsymmetrische Fall ist nicht statisch bestimmt. Zugehörige Probleme wurden bisher i. a. durch Hinzunahme einer weiteren Spannungsgleichung, des sog. HAAK-v. KARMANSchen Fließkriteriums (Gleichheit einer in der Meridianebene gelegenen

*) Lehrstuhl und Institut für Mechanik, Technische Hochschule Hannover.

Hauptspannung mit der Azimutalspannung), statisch bestimmt gemacht (als Beispiel für neuere diesbzgl. Literatur vgl. IVLEV [2]), obwohl jenes Kriterium bekanntermaßen wenigstens in Verbindung mit Fließkriterium a) zu Widersprüchen führt (Überbestimmtheit; vgl. [1]). Ein exakter Weg beruht auf dem Erraten einer geeigneten, nur mit den Randbedingungen verträglichen Kinetik, führt allerdings nur zu oberen Schranken der Formänderungsarbeit (JOHNSON AND KUDO [3]). PARSONS [4] reduzierte das Grundgleichungssystem auf ein analytisch geeigneteres, konnte aber keine speziellen Lösungen angeben. Legt man jedoch das TRESCASche Kriterium b) zugrunde, so ergibt sich wenigstens im Falle der Verschiedenheit aller drei Hauptspannungen ein nur Formänderungsgrößen verknüpfendes lineares DGl.-System

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} + \cos^2 \psi \cdot \frac{u}{r} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \sin^2 \psi \cdot \frac{u}{r} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} - \sin 2\psi \cdot \frac{u}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4),$$

(u = Geschwindigkeit radial (r -Richtung);
 w = Geschwindigkeit axial (z -Richtung);
 ψ = Winkel zwischen z -Achse und mittlerer
Hauptspannungsrichtung): Das Problem ist
kinematisch bestimmt. Obschon dies bereits
SHIELD [5] erkannte, benutzte auch er das
HAAR-V. KARMANSche Kriterium und wid-
mete sich nur dem statisch bestimmten An-
satz, um ihn an Hand allgemeiner Theoreme
(vgl. BLAND [6]) zu begründen. Jedoch wird
dabei nach Ansicht des Verfassers die Iso-
tropie verletzt. Im übrigen entspricht kine-
matische Bestimmtheit der Erfahrungstat-
sache, daß die Kinematik eines Umform-
prozesses weitgehend unabhängig von den
Werkstoffeigenschaften ist.

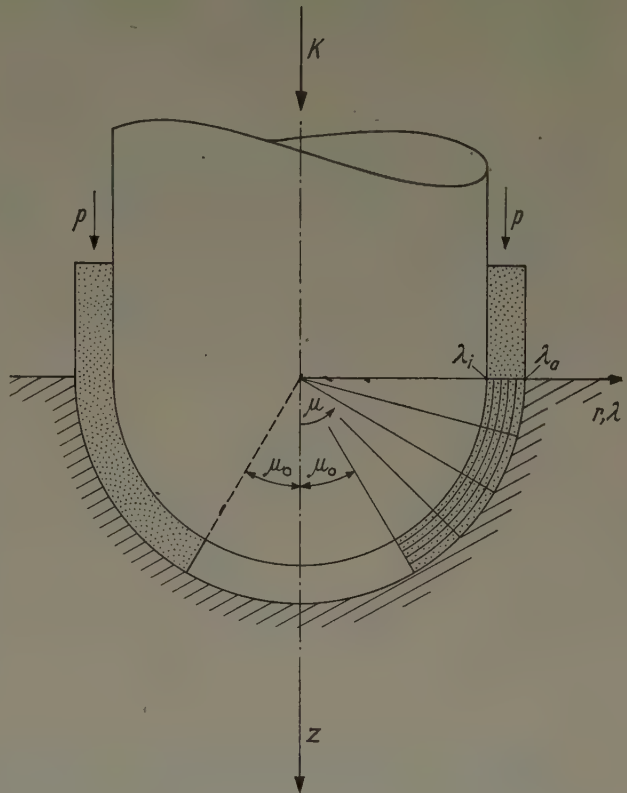
(4) als lineares System erster Ordnung ist singulär: Jede Kurve der Meridianebene wäre Charakteristik. Durch Elimination von ψ erhält man jedoch eine nicht-lineare hyperbolische DGL. zweiter Ordnung mit den Hauptspannungslinien als orthogonales Charakteristikenfeld. Transformation von (4) auf Charakteristikenkoordinaten λ, μ (Linien $\mu = \text{const}$: mittlere Hauptspannungsrichtungen) führt zu einem allerdings nicht allgemein geschlossen integrierbaren charakteristischen System (Ableitungen als Indizes)

$$\left. \begin{aligned} r \varepsilon_{\lambda} + (\varepsilon + \omega \operatorname{ctg} \psi) r_{\lambda} &= 0, \\ \varepsilon \psi_{\lambda} + \omega_{\lambda} &= 0, \\ r \varepsilon_{\mu} + (2 \varepsilon - \omega \operatorname{tg} \psi) r_{\mu} &= 0, \\ r \varepsilon \psi_{\mu} - (\varepsilon \operatorname{tg} \psi + \omega) r_{\mu} - r \omega_{\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5),$$

wo $\varepsilon = \frac{u}{r}$, $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)$. Da die Determinante i. a. nicht verschwindet, ist das Anfangswertproblem (Anfangswerte nicht auf einer Charakteristik) eindeutig lösbar. Man beweist: Jede Lösung läßt sich — bei gegebenen Anfangswerten eindeutig — zu einer Lösung des Ausgangssystems (4) vervollständigen.

Die meisten technischen Umformverfahren führen jedoch auf Randwertprobleme. Man wird — ähnlich wie in der Gleitlinientheorie (s. o.) — Grundtypen von Feldern zu erraten und dann zu kombinieren suchen, so daß die jeweiligen kinematischen Randbedingungen erfüllt sind. Die statische Verträglichkeit ist anschließend zu prüfen.

Das einfachste nicht-triviale Feld besteht aus einem Büschel von Geraden $\mu = \text{const.}$, Zentrum auf der Achse, mit konzentrischen Kreisen $\lambda = \text{const.}$ Die einfachste zugehörige plastische Strömung entspricht einer Drehung des Büschels um das Zentrum. Anwendung (vgl. Bild): Reibungsfreies Einziehen eines Rohres (etwa zum Zwecke des Verschleißens) in eine halbkugelförmige Gravur. Die Lösung ist jedoch nur dann statisch verträglich, wenn ein Gegendruck



von innen wirkt. Er kann etwa durch einen konzentrischen halbkugelförmigen Kern ausgeübt werden. Für idealplastischen Werkstoff ($Y = \text{const.}$) ergibt sich der Einziehdruck p zu

$$p = -Y \cdot \ln \sin \mu_0.$$

Die Belastung K des Kernes darf zwischen wohlbestimmten Schranken variieren.

Das beschriebene Geradenbüschelfeld scheint das einzige zu sein, für das eine der beiden Charakteristikenscharen aus Geraden besteht. Man muß i. a. mit weniger einfachen Konstruktionsmethoden als in der Gleitlinientheorie rechnen. Allgemeine geometrische Eigenschaften der Felder waren — abgesehen von der Orthogonalität — bisher nicht zu erkennen. Erschwerend wirkt sich die prinzipielle Unsymmetrie in λ und μ aus.

Literatur

- [1] R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford 1950, Clarendon Press.
- [2] D. D. IVLEV, J. Appl. Math. Mech. **22** (1958), p. 943—951; Soviet Physics Dokl. **123**(3) (1958), p. 1294—1296; Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Techn. Nauk. Meh. Mašinostr. 1959, no. 1, p. 132—133.
- [3] W. JOHNSON and H. KUDO, Int. J. Mech. Sciences **1** (1960), p. 175—191.
- [4] D. H. PARSONS, Proc. London Math. Soc., III. Ser., **6** (1956), p. 610—625; J. London Math. Soc. **32** (1957), p. 233.
- [5] R. T. SHIELD, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **233** (1955), p. 267—287.
- [6] D. R. BLAND, J. Mech. Phys. Solids **6** (1957), p. 71—78.

Anschrift: Dr. H. LIPPMANN, Kleinburgwedel b. Hannover, Marktstraße 15A

Der selbsterregte und der parametererregte Schaukelschwinger

Von KURT MAGNUS

Die Bewegungen des ungedämpften Fadenpendels genügen der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0 \quad \dots \dots \dots (1).$$

Mit $L = L(t)$ wird (1) zur Gleichung eines rheonomen Systems, in dem bei periodischem $L(t)$ für bestimmte „Parameterfrequenzen“ Ω Schwingungen entstehen können, die man als parametererregt bezeichnet hat. Als Musterbeispiel wird in diesem Zusammenhang meist die Schaukel erwähnt (s. z. B. [1], [2], [3]), deren Schwingungen durch periodische Verlagerungen des Schwerpunktes angeregt und unterhalten werden. Der Schaukelnde muß durch geeignete Bewegungen den Schwerpunkt des Systems während des Durchganges durch die tiefste Lage etwas anheben (d. h. die Fadenlänge L verkleinern) und in der Nähe der Umkehrpunkte wieder senken (d. h. die Fadenlänge L vergrößern). Die Fadenlänge L hängt dabei vom Schwingungszustand ab, sie ist eine Funktion der Auslenkung φ und der Schwingungsgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, nicht aber der Zeit t . Die Zeitabhängigkeit kommt erst sekundär über $\varphi = \varphi(t)$ herein. Mit $L = L(\varphi, \dot{\varphi})$ nimmt aber Gl. (1) die Gestalt

$$\ddot{\varphi} + f(\varphi, \dot{\varphi}) = 0 \quad \dots \dots \dots (2)$$

an. Dies ist die allgemeine Gleichung eines autonomen Schwingers, der im Falle der Schaukel selbsterregungsfähig ist. Parametererregte Schwingungen sind demgegenüber heteronom, weil die Parameteränderungen nicht vom Schwingungszustand abhängen.

Ein vereinfachtes Schaukelmodell, bei dem die Fadenlänge bereichsweise konstant ist, wurde z. B. in [2], [3] näherungsweise berechnet. Es lassen sich jedoch sowohl für den selbsterregten als auch für den parametererregten Schwinger exakte Lösungen finden. Hierzu sollen als Beispiele a) das Amplitudengesetz für die selbsterregte Schaukel und b) die periodischen Bewegungen der parametererregten Schaukel erwähnt werden.

a) Es sei

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{L_1 + L_2}{2} - \frac{L_1 - L_2}{2} \operatorname{sgn} \varphi \operatorname{sgn} \dot{\varphi} \quad \dots \dots \dots (3).$$

Das entspricht dem in Bild 1 gezeichneten Schwerpunktsweg: das Heben erfolgt momentan beim Durchgang durch den tiefsten Punkt, entsprechend das Senken in den Umkehrpunkten. Die Halbschwingung kann in die Bereiche „1“ und „2“ zerlegt werden, für die L jeweils konstant

ist. Gesucht wird der Zusammenhang zwischen dem Anfangswert φ_{10} für den ersten Bereich und dem Endwert φ_{20} des zweiten Bereiches. Nach dem Energiesatz gilt

$$\dot{\varphi}_{1m}^2 = \frac{2g}{L_1} (1 - \cos \varphi_{10}); \quad \dot{\varphi}_{2m}^2 = \frac{2g}{L_2} (1 - \cos \varphi_{20}) \quad \dots \quad (4).$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Maximalgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_{1m}$ und $\dot{\varphi}_{2m}$ (im tiefsten Punkt) ist aus dem Drallsatz zu erkennen: durch das momentane Anheben im tiefsten Punkt wird der Drall des Systems bezüglich des Aufhängepunktes nicht geändert, so daß gilt:

$$L_1^2 \dot{\varphi}_{1m} = L_2^2 \dot{\varphi}_{2m} \quad \dots \quad (5).$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$L_1^3 (1 - \cos \varphi_{10}) = L_2^3 (1 - \cos \varphi_{20}) \quad \dots \quad (6).$$

Diese Formel kann zu einer Rekursionsformel erweitert werden, da sie sinngemäß für jede weitere Halbschwingung gilt. Man bekommt nach $n-1$ Halbschwingungen:

$$\cos \varphi_{n0} = 1 - \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^{3(n-1)} (1 - \cos \varphi_{10}) \quad \dots \quad (7).$$

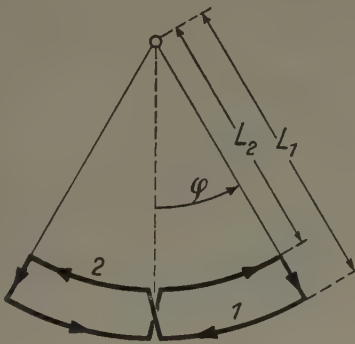


Bild 1. Schwerpunktsweg bei einem vereinfachten Schaukelmodell

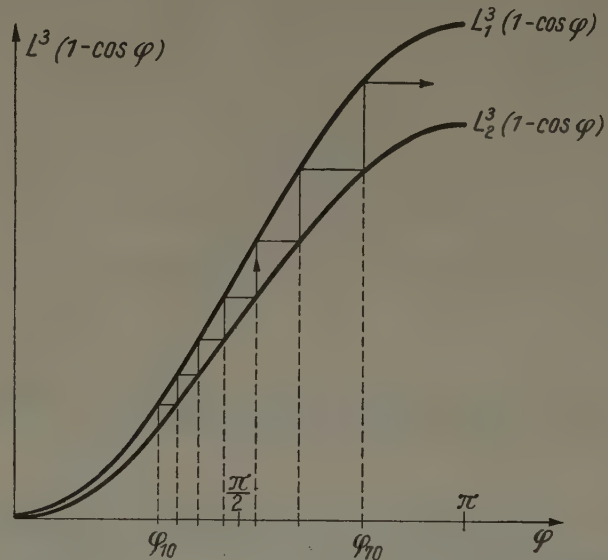


Bild 2. Bestimmung der Umkehramplituden für die selbsterregte Schaukel

Am einfachsten läßt sich die Folge der Umkehramplituden graphisch bestimmen, wie es in Bild 2 dargestellt ist: ausgehend von einer Anfangsauslenkung φ_{10} hat man die zwischen den Kurven $L_1^3 (1 - \cos \varphi)$ und $L_2^3 (1 - \cos \varphi)$ aufsteigende Treppenkurve zu zeichnen. Ihre Sprungabszissen ergeben die Umkehramplituden.

Ist die zur Anfangsauslenkung φ_{10} gehörende potentielle Energie des Systems gleich E_{10} , so findet man leicht für den Energiezuwachs während der ersten Halbschwingung:

$$E = \frac{(L_1 - L_2) (L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}{L_2^3} E_{10} = c E_{10} \quad \dots \quad (8)$$

mit der nur noch von den beiden Werten der Pendellänge abhängigen Konstanten c . Da (8) wiederum sinngemäß für alle weiteren Halbschwingungen gilt, erhält man für die Energie nach n Halbschwingungen:

$$E_{n0} = E_{10} (1 + c)^{n-1} \quad \dots \quad (9).$$

Die Energie wächst also in geometrischer Progression mit der Zahl der Halbschwingungen.

b) Es sei jetzt $L(t)$ eine zwischen den Werten L_1 und L_2 periodisch wechselnde Mäanderfunktion mit der vorgegebenen Periodenzeit T_p . Wir wollen periodische Lösungen der Gl. (1) suchen. Da hierfür der Energieinhalt des Systems für alle Zeitpunkte, die um den Betrag T_p auseinanderliegen, konstant bleibt, müssen sich Energiezufuhr durch Heben und Energieverlust durch Senken für eine Periode aufheben. Das ist sicher der Fall, wenn das Heben und Senken an Stellen geschieht, an denen jeweils $\cos \varphi$ (potentielle Energie) bzw. $\dot{\varphi}^2$ (kinetische Energie) dieselben Werte haben. Außerdem müssen die Zeitpunkte für Heben und Senken um $T_p/2$ auseinanderliegen. Die Erfüllung dieser Forderungen hat eine gewisse Symmetrie der zugehörigen

Phasenkurven in der $\varphi, \dot{\varphi}$ -Ebene zur Folge. Zwei von den zahlreichen Möglichkeiten sind in Bild 3 skizziert. Bei konstantem L treten periodische Schwingungen auf, deren Phasenkurven ellipsenähnliche Gestalt haben. Sprunghafte Änderungen von L bedeuten ein Springen von einer Phasenkurve zu einer anderen, wobei der Abszissenwert beibehalten wird, während für die Größe des Ordinaten Sprunges Gl. (5) gilt. Wegen der Symmetrie der Kurven genügt es, den Verlauf in einem Quadranten zu untersuchen. Die Teilstücke AB und CD werden jeweils in den Zeiten $T_p/4$ durchlaufen; der Sprung BC erfolgt momentan. Aus den Übergangsbedingungen an der Sprungstelle

$$\varphi_B = \varphi_C \quad \text{und} \quad L_2^2 \dot{\varphi}_B = L_1^2 \dot{\varphi}_C \quad \dots \dots \dots (10)$$

läßt sich dann die zu vorgegebener Parameterzeit T_p gehörende Amplitude der Schwingung errechnen.

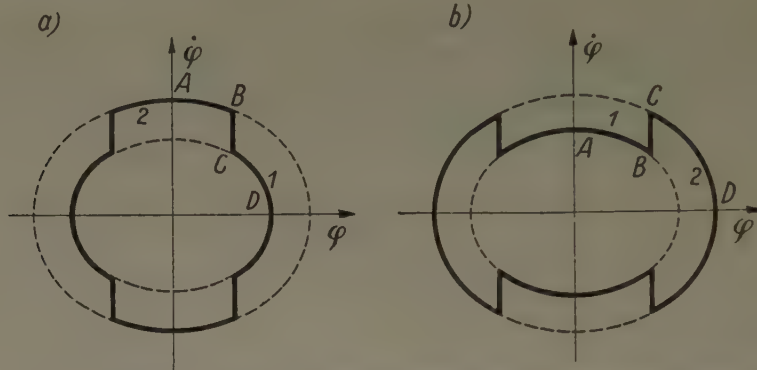


Bild 3. Phasenkurven möglicher periodischer Bewegungen für die parameterregte Schaukel

Die exakte Lösung der nichtlinearen Gl. (1) für konstantes L ist bekanntlich

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \operatorname{sn} [k; \omega (t - t_0)] \quad \dots \dots \dots (11)$$

mit $\omega^2 = g/L$ und dem Modul $k = \sin (\varphi_0/2)$. Integrationskonstanten sind die Amplitude φ_0 und die Zeit t_0 . Im Falle von Bild 3a gilt nun für das Teilstück AB mit $t_0 = 0$:

$$\sin \frac{\varphi_2}{2} = k_2 \operatorname{sn} (k; \omega_2 t) \quad \dots \dots \dots (12).$$

Nach den Differentiationsregeln für die JACOBI'schen elliptischen Funktionen folgt für die Geschwindigkeit aus (12):

$$\dot{\varphi}_2 = 2 \omega_2 k_2 \operatorname{cn} (k; \omega_2 t) \quad \dots \dots \dots (13).$$

Für das Teilstück CD setzt man $\omega_1 t_0 = -K(k_1)$ mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung $K(k_1)$ und bekommt so:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varphi_1}{2} &= k_1 \operatorname{sn} \left[k_1; \omega_1 \left(t + \frac{K(k_1)}{\omega_1} \right) \right], \\ \dot{\varphi}_1 &= 2 \omega_1 k_1 \operatorname{cn} \left[k_1; \omega_1 \left(t + \frac{K(k_1)}{\omega_1} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (14).$$

Mit Einsetzen von $t = T_p/4$ in (12) und (13), sowie $t = -T_p/4$ in (14) erhält man nun aus den Übergangsbedingungen (10) zwei transzendente Gleichungen, aus denen k_1 und k_2 und damit die beiden unbekannten Amplituden φ_{10} und φ_{20} errechnet werden können. Im Falle 3a ist φ_{10} , im Falle 3b φ_{20} die interessierende Amplitude des Schwingungsvorganges. Durch Variieren von T_p und Ausrechnen der dazu gehörenden φ_0 -Werte können die zu periodischen Lösungen gehörenden Wertepaare T_p, φ_0 bestimmt, und damit auch die Grenzen zwischen stabilen und instabilen Lösungen des parametererregten Schaukelschwingers exakt berechnet werden. Näheres s. [4]).

Literatur

- [1] I. P. DEN HARTOG-MESMER, Mechanische Schwingungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1952, Springer-Verlag, Kap. VIII.
- [2] S. P. STRELKOV, Einführung in die Theorie der Schwingungen (russisch), Moskau/Leningrad 1951, Kap. 7.
- [3] K. F. TEODORČIK, Selbstschwingende Systeme (russisch), Moskau/Leningrad 1952, § 37.
- [4] K. MAGNUS, Schwingungen, Stuttgart 1961, B. G. Teubner-Verlag, Kap. 4.

Anschrift: Prof. Dr. KURT MAGNUS, Stuttgart-O, Hackländerstraße 33

Zur Theorie des Bimetall-Streifens

Von O. MAHRENHOLTZ*) und W. JOHNSON

1. Grundbeziehungen

Wir betrachten einen freien aus zwei Rechteckstäben 1 und 2 zusammengesetzten, bei der Ausgangstemperatur t_0 geraden und spannungsfreien Bimetall-Streifen, bei dem ideale Haftung in der Berührungsfläche von 1 und 2 vorausgesetzt wird. Die Werkstoffe 1 und 2 haben die konstanten linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1 und α_2 mit $\alpha_2 > \alpha_1$, so daß der Streifen bei der in ihm konstanten Temperatur $t > t_0$ den Krümmungsradius $\varrho = \varrho(t)$ hat mit 1 auf der konkaven und 2 auf der konvexen Seite (s. Bild 1; dort weitere Bezeichnungen, auf die im folgenden Bezug genommen wird). Weiter wird von den Annahmen der elementaren Theorie der elastischen Balkenbiegung Gebrauch gemacht: Spannungszustand $\sigma_s = \sigma$, $\sigma_\xi = 0 = \sigma_b$, $\sigma_{ik} = 0$ für $i \neq k$; ebene und zur Biegeachse normale Querschnitte bleiben eben und normal zur Biegeachse; von der Querdehnung wird abgesehen, h_1 , h_2 und b sind hier konstante Längen.

Der Verzerrungszustand eines Punktes (ξ, s) wird dann angenähert durch

$$\varepsilon(\xi, s) = \varepsilon(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\varrho} \quad \dots (1.1)$$

beschrieben, wobei ξ_0 die Lage der momentan ungelängten Faser festlegt. $\varepsilon(\xi)$ setzt sich für jeden der Werkstoffe 1 (2) aus

$$\varepsilon_{1(2)}(\xi) = \varepsilon_{w1(2)} + \varepsilon_{s1(2)}(\xi) \quad \dots (1.2)$$

mit

$$\varepsilon_{w1(2)} = \alpha_{1(2)} (t - t_0) = \alpha_{1(2)} \Delta t \quad \dots (1.3)$$

als Wärmedehnung und $\varepsilon_{s1(2)}(\xi)$ als spannungsabhängiger Dehnung zusammen. Aus (1.1), (1.2) und (1.3) folgt für die spannungsabhängige Dehnung

$$\varepsilon_{s1(2)}(\xi) = \frac{\xi - \xi_0}{\varrho} - \alpha_{1(2)} \Delta t \quad \dots (1.4).$$

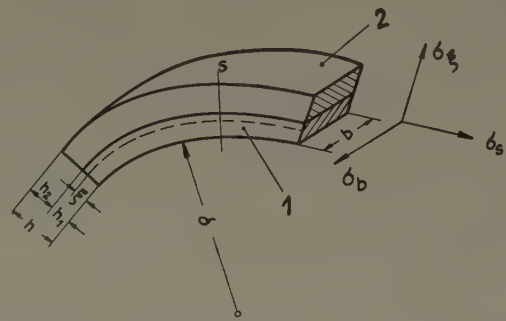


Bild 1. Bimetall-Streifen bei einer Temperatur $t > t_0$

An die Stelle der Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen σ_{ik} treten die auf die Einheitsbreite bezogenen Ausdrücke für das Kräftegleichgewicht

$$\int_0^{h_1} \sigma_1(\xi) d\xi + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_2(\xi) d\xi = 0 \quad \dots (1.5)$$

und das Momentengleichgewicht

$$\int_0^{h_1} \sigma_1(\xi) \xi d\xi + \int_{h_1}^{h_2} \sigma_2(\xi) \xi d\xi = 0 \quad \dots (1.6)$$

über dem Streifenquerschnitt. Die Spannungsrandbedingungen werden als erfüllt angesehen, die Biegeformen $\varrho(t)$ stellen sich als eine Folge statischer Gleichgewichtszustände dar.

2. Elastisches Werkstoffverhalten

Das HOOKEsche Gesetz

$$\varepsilon_{s1(2)}(\xi) = \frac{\sigma_{1(2)}(\xi)}{E_{1(2)}} \quad \dots (2.1)$$

liefert mit (1.4), (1.5) und (1.6) sowie den Abkürzungen $m = h_1/h_2$ und $n = E_1/E_2$ die bezogene Krümmung

$$\frac{h}{\varrho} = \frac{6(1+m)^2 n m}{n^2 m^4 + 4 n m^3 + 6 n m^2 + 4 n m + 1} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t \quad \dots (2.2).$$

Zu diesem Resultat gelangte auf anderem Wege, jedoch mit den im Prinzip gleichen Annahmen, TIMOSHENKO [1].

Die Lage ξ_0 der ungelängten Faser hängt nicht von der Temperatur t ab.

*) Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover.

3. Elastisch-plastisches Werkstoffverhalten

Das Werkstoffverhalten kann hier direkt der bei einachsigen Spannungszustand aufgenommenen Fließkurve entnommen werden. Es gibt dann nur numerische Einzellösungen. Wir idealisieren das Werkstoffverhalten:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \varepsilon E & \text{für } |\varepsilon| \leq \frac{Y}{E}, \\ \sigma &= Y & \text{für } \varepsilon > \frac{Y}{E}, \\ \sigma &= -Y & \text{für } \varepsilon < -\frac{Y}{E} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.1).$$

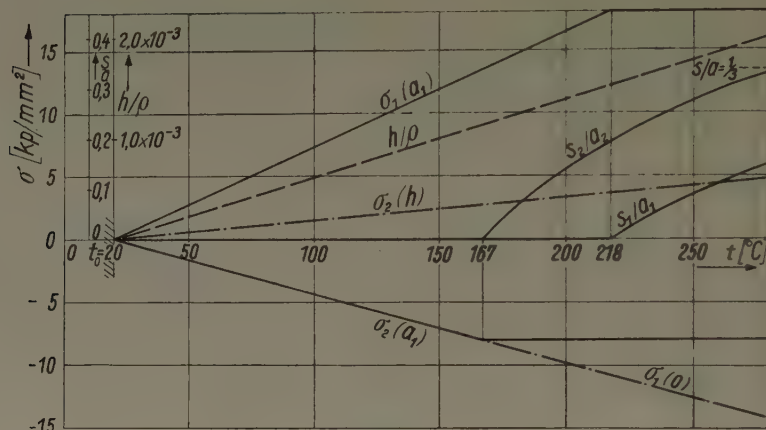


Bild 2. Bezogene Krümmung h/ρ , Spannungen σ und bezogene plastische Zonen s/h abhängig von der Temperatur t . $m = 1$.

Werkstoff 1: $E_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ kp/mm}^2$
(entspricht $Y_1 = 18 \text{ kp/mm}^2$
etwa Flußstahl) $\alpha_1 = 10^{-5}/^\circ\text{C}$

Werkstoff 2: $E_2 = 10^4 \text{ kp/mm}^2$
(entspricht $Y_2 = 6 \text{ kp/mm}^2$
etwa Messing) $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$

Im plastischen Bereich tritt hier an die Stelle eines Stoffgesetzes $\varepsilon_{ik} = f(\sigma_{ik})$ die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Im elastischen Fall haben die Spannungen Extremwerte bei $\xi = 0, h_1, h$. Wegen $|\sigma_1(h_1)| > |\sigma_1(0)|$ und $|\sigma_2(h_1)| > |\sigma_2(h)|$ beginnt die Plastifizierung stets an der Trennfläche $\xi = h_1$. Von hier aus breiten sich plastische Zonen s_1 in 1 und s_2 in 2 nach außen hin aus, für die aus (1.4), (1.5), (1.6) und (3.1) näherungsweise folgt (Terme in s^2 und s^3 vernachlässigt)

$$\frac{s_1}{h_1} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t (4 n m^3 + 3 n m^2 + 1) - \frac{Y_1}{E_1} (n^2 m^4 + 4 n m^3 + 6 n m^2 + 4 n m + 1)}{6 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t (1 + m) n m^2} \quad (3.2),$$

$$\frac{s_2}{h_2} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t (n^2 m^4 + 3 n m^2 + 4 n m) - \frac{Y_2}{E_2} (n^2 m^4 + 4 n m^3 + 6 n m^2 + 4 n m + 1)}{6 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t (1 + m) n m} \quad (3.3)$$

mit

$$0 \leq s_{1(2)} < \frac{1}{3} \max(h_1, h_2) \quad \dots \dots \dots (3.4).$$

Die Beziehungen für ϱ und ξ_0 von Abschnitt 2 gelten auch hier. Wegen der Einschränkung (3.4) ist es hier im allgemeinen nicht möglich, das Auftreten plastischer Zonen an den Außenrändern $\xi = 0, h$ zu beschreiben, da dann (3.2) und (3.3) ihre Gültigkeit verlieren.

Bild 2 zeigt ein numerisches Beispiel.

4. Elastische Rückfederung

Ist der Verformungszustand des Bimetall-Streifens bei der Temperatur t noch voll elastisch, so federt er beim Abkühlen auf die Temperatur t_0 in seine Ausgangslage zurück. Haben sich hingegen bei der Temperatur t plastische Zonen s_1 und (oder) s_2 gebildet, so strebt der Bimetall-Streifen beim Abkühlen auf die Ausgangstemperatur t_0 einer neuen Gleichgewichtslage zu. Da

seine Verformungsgeschichte bekannt ist, lassen sich (wiederum mit der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte) über (1.4), (1.5), (1.6) und (3.1) Krümmung und Restspannungen bei der Temperatur t_0 errechnen. Eine allgemeine Lösung ist sehr aufwendig, da sie von vielen Parametern abhängt.

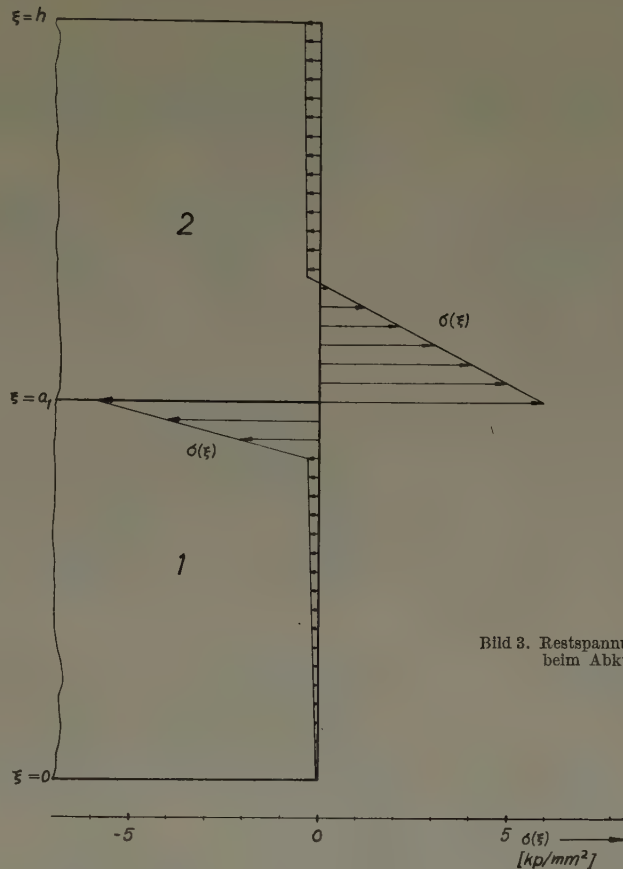


Bild 3. Restspannungen des Bimetallstreifens nach Bild 2 beim Abkühlen von $t = 280^\circ\text{C}$ auf $t_0 = 20^\circ\text{C}$

Als Beispiel ist der Restspannungszustand berechnet, der sich beim Abkühlen des Bimetallstreifens nach Bild 2 von $t = 280^\circ\text{C}$ auf $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ergibt. Die Restspannungen sind in Bild 3 dargestellt. Sie erfüllen die Bedingungen des Spannungsgleichgewichts. Die Krümmung bei $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ist der Wärme Krümmung entgegengesetzt und nur rund 1/100 derjenigen bei $t = 280^\circ\text{C}$. Trotzdem sind die Größtwerte der Restspannungen im Vergleich mit den Fließspannungen erheblich.

Literatur

[1] S. P. TIMOSHENKO, Collected Papers, New York 1953, McGraw-Hill, S. 403 ff.

Anschriften: Dipl.-Ing. O. MAHREHOLTZ, Hannover, Stolzestr. 60
Prof. W. JOHNSON D. Sc., College of Science and Technology, Manchester, U.K.

Über die Konstruktion von Näherungslösungen für Segmente von dünnen, elastischen Kreisringplatten

Von KH. NASITTA

Die Mittelebene der zu betrachtenden Platten werde durch die Polarkoordinaten r, φ beschrieben. Die Polarkoordinaten ϱ, ψ bestimmen jeweils denjenigen Punkt, in dem die Platten durch Einzellasten belastet werden.

Für das in der Abbildung dargestellte schraffierte Segment einer dünnen, elastischen Kreisringsplatte mit dem Öffnungswinkel $\gamma > 0$ soll eine Näherungslösung für die Durchbiegungsfunktion $w(r, \varphi)$ des Segments konstruiert werden, wenn die Segmentplatte an den Rändern „1“,

„2“, „3“ und „4“ (vgl. Bild) gewissen zugelassenen Randbedingungen der elementaren Plattentheorie unterworfen ist und durch die äußere Last $p(r, \varphi)$ beansprucht wird. Dann muß bekanntlich [1] für $w(r, \varphi)$ gelten:

$$\Delta \Delta w(r, \varphi) = \frac{p(r, \varphi)}{K} \quad \text{in} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < r < b \\ -\gamma < \varphi < +\gamma \end{array} \right\} \quad (1).$$

Wenn R_i ($i = 1 \dots 9$) die linearen Differentialoperatoren für irgendwelche Randbedingungen der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie bedeuten und $R_i[w](k)$, daß R_i auf $w(r, \varphi)$ angewendet wird und auf dem Rande k zu nehmen ist, so muß $w(r, \varphi)$ weiterhin die folgenden Gleichungen befriedigen:

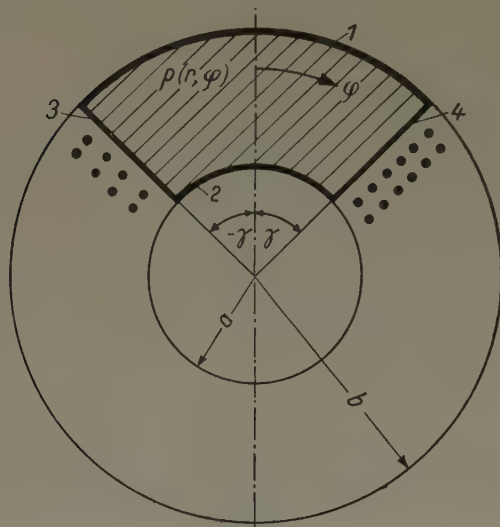


Bild 1. Segment der Kreisringplatte als Teil des Kreisringes und Bezeichnungen

$$\left. \begin{array}{ll} R_1[w](1) = 0, & R_2[w](1) = 0, \\ R_3[w](2) = 0, & R_4[w](2) = 0 \end{array} \right\} \quad (2);$$

$$R_5[w](3) = 0, \quad R_6[w](3) = 0 \quad (3);$$

$$R_7[w](4) = 0, \quad R_8[w](4) = 0 \quad (4).$$

Die Anwendung der Methode der Ersatzscherkräfte aus der elementaren Plattentheorie hat bekanntlich zur Folge, daß sich an freien Ecken Einzelkräfte bilden. Nimmt man zum Beispiel an, daß diejenigen Ecken, wo die Ränder „3“, „2“ und „4“, „2“ zusammenstoßen, frei sind, so treten noch zwei weitere Bedingungen für $w(r, \varphi)$ hinzu:

$$R_9[w](3, 2) = 0, \quad R_9[w](4, 2) = 0 \quad (5),$$

wobei R_9 der Operator für das Drillungsmoment ist. Da sich (2), (3), (4) und (5) durch Lösungen aus (1) nicht gleichzeitig erfüllen lassen, kann bei freien

Ecken und Anwendung der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie in jedem Falle nur mit einer approximativen Erfüllung der Randbedingungen gerechnet werden.

Nun ist es möglich [2], für alle zugelassenen Randbedingungen an den Rändern „1“ und „2“ (vgl. Bild) die GREENSche Funktion $G(r, \varphi; \varrho, \psi)$ für den Kreisring zu konstruieren. Sie läßt sich stets als gleichmäßig und absolut konvergente FOURIERreihe darstellen [2] durch

$$G(r, \varphi; \varrho, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(r; \varrho) \cos m(\varphi - \psi) \quad (6)$$

mit

$$\Delta \Delta G(r, \varphi) = 0 \quad \text{in} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < r < b \\ -\pi \leq \varphi \leq +\pi \end{array} \right\} \quad (7),$$

außer wenn

$$(r, \varphi) = (\varrho, \psi)$$

und

$$\left. \begin{array}{ll} R_1[G](1) = 0, & R_2[G](1) = 0; \\ R_3[G](2) = 0, & R_4[G](2) = 0 \end{array} \right\} \quad (8).$$

Bildet man nun

$$u(r, \varphi) = \iint p(\varrho, \psi) G(r, \varphi; \varrho, \psi) \varrho d\varrho d\psi \quad (9),$$

so gilt, wie man weiß [2], für $u(r, \varphi)$ aus (9)

$$\Delta \Delta u(r, \varphi) = \frac{p(r, \varphi)}{K} \quad (10)$$

und wegen (8)

$$\left. \begin{array}{ll} R_1[u](1) = 0, & R_2[u](1) = 0; \\ R_3[u](2) = 0, & R_4[u](2) = 0 \end{array} \right\} \quad (11).$$

Damit ist ein Lastintegral für das vorgelegte Problem gefunden, das die Randbedingungen (2) befriedigt.

Für $w(r, \varphi)$ aus (1) wird jetzt mit (6) und (9) der Ansatz¹⁾ gemacht

$$w(r, \varphi) = u(r, \varphi) + \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} G(r, \varphi; \varrho_{\nu}, \psi_{\nu}) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} G(r, \varphi; \varrho_{\mu}, \psi_{\mu}) \quad \dots \quad (12),$$

wobei

$$a < (\varrho_{\nu}, \varrho_{\mu}) < b, \quad \gamma < (\psi_{\nu}, \psi_{\mu}) < 2\pi - \gamma \quad \dots \quad (13)$$

und die $\alpha_{\nu}, \beta_{\mu}$ vorerst noch freie konstante Faktoren sind. Wegen (7), (10) und (13) erfüllt dann $w(r, \varphi)$ gemäß (12) die Differentialgleichung (1) im Innern des Segmentgebietes; außerdem wegen (8) und (11) die Randbedingungen (2).

Entlang des Randes „3“ werden jetzt N Einzellasten in Paaren (vgl. Abb.) durch geeignete Wahl der $\varrho_{\nu}, \psi_{\nu}$ in (12) aufgebracht. Ebenso längs „4“ M Einzellastpunkte durch willkürliche Vorgabe der $\varrho_{\mu}, \psi_{\mu}$ in (12). Damit sind die GREENSchen Funktionen G in (12) bestimmt und die noch freie Größe der Einzellasten α_{ν} ($\nu = 1 \dots N$) und β_{μ} ($\mu = 1 \dots M$) wird durch die näherungsweise Befriedigung von (3), (4) und, wenn erforderlich, (5) festgelegt.

Mit ε_i, δ_i „möglichst klein“ fordern wir wegen (3) an l diskreten Punkten 3_i des Randes „3“

$$\left. \begin{aligned} R_5[w](3_i) &= \varepsilon_i, \\ R_6[w](3_i) &= \delta_i, \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } i = 1 \dots l > \frac{N-1}{2} \quad \dots \quad (14)$$

und ebenso wegen (4) an m diskreten Punkten des Randes „4“

$$\left. \begin{aligned} R_7[w](4_k) &= \bar{\varepsilon}_k, \\ R_8[w](4_k) &= \bar{\delta}_k \end{aligned} \right\} \quad \text{mit } k = 1 \dots m > \frac{M-1}{2} \quad \dots \quad (15),$$

wobei $\bar{\varepsilon}_k$ und $\bar{\delta}_k$ „möglichst kleine“ konstante Zahlen sein sollen. Im Falle freier Ecken wird entsprechend aus (5)

$$R_9[w](3, 2) = e_1, \quad R_9[w](4, 2) = e_2 \quad \dots \quad (16)$$

mit e_1, e_2 als noch unbekannte, „sehr kleine“ Zahlen.

Gemäß (12) folgt aus (14), (15) und (16), wenn

$$\left. \begin{aligned} G_{\nu} &\equiv G(r, \varphi; \varrho_{\nu}, \psi_{\nu}) \quad \text{und} \quad G_{\mu} \equiv G(r, \varphi; \varrho_{\mu}, \psi_{\mu}): \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_5[G_{\nu}](3_i) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_5[G_{\mu}](3_i) &= -R_5[u](3_i) + \varepsilon_i, \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_6[G_{\nu}](3_i) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_6[G_{\mu}](3_i) &= -R_6[u](3_i) + \delta_i, \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_7[G_{\nu}](4_k) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_7[G_{\mu}](4_k) &= -R_7[u](4_k) + \bar{\varepsilon}_k, \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_8[G_{\nu}](4_k) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_8[G_{\mu}](4_k) &= -R_8[u](4_k) + \bar{\delta}_k, \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_9[G_{\nu}](3, 2) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_9[G_{\mu}](3, 2) &= -R_9[u](3, 2) + e_1, \\ \sum_{\nu=1}^N \alpha_{\nu} R_9[G_{\nu}](4, 2) + \sum_{\mu=1}^M \beta_{\mu} R_9[G_{\mu}](4, 2) &= -R_9[u](4, 2) + e_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (17),$$

wobei

$$i = 1 \text{ bis } l$$

und

$$k = 1 \text{ bis } m.$$

Damit liegen $2(l + m + 1)$ lineare Gleichungen für die $(N + M)$ Unbekannten $\alpha_{\nu}, \beta_{\mu}$ vor. Wegen (14) und (15) gilt

$$2(l + m + 1) > M + N \quad \dots \quad (18).$$

Also ist (17) ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem und die noch unbestimmten $\varepsilon_i, \delta_i, \bar{\varepsilon}_k, \bar{\delta}_k, e_1$ und e_2 können im Sinne der GAUSSSchen Norm zu einem Minimum gemacht werden, das heißt

$$\sum_{i=1}^l (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) + \sum_{k=1}^m (\bar{\varepsilon}_k^2 + \bar{\delta}_k^2) + e_1^2 + e_2^2 = \text{Min.} \quad \dots \quad (19a).$$

¹⁾ G. RUMPEL hat unabhängig hiervon diese Methode auf die Berechnung schiefwinkliger Platten angewendet.

Für den Fall, daß (5) gilt, sind e_1 und e_2 proportional den Einzellasten an den freien Ecken. Es kann hier also nicht, wie längs der Ränder „3“ und „4“ durch positive und negative ε_i , δ_i und $\bar{\varepsilon}_k$, $\bar{\delta}_k$ eine Oszillation um den gemäß (3) und (4) geforderten Wert Null stattfinden. Es ist also erforderlich, e_1 und e_2 sehr viel kleiner zu machen als ε_i , δ_i und $\bar{\varepsilon}_k$, $\bar{\delta}_k$. Deshalb sind e_1 und e_2 in (19a) mit Gewichtungsfaktoren $n_1^2 > 1$ und $n_2^2 > 1$ zu multiplizieren, so daß entsteht:

$$\sum_{i=1}^l (\varepsilon_i^2 + \delta_i^2) + \sum_{k=1}^m (\bar{\varepsilon}_k^2 + \bar{\delta}_k^2) + n_1^2 e_1^2 + n_2^2 e_2^2 = \text{Min.} \quad (19).$$

Hierbei sind n_1 und n_2 durch numerische Experimente so zu ermitteln, daß (5) hinreichend gut befriedigt wird. Je größer man n_1 und n_2 wählt, desto besser wird zwar (5) befriedigt, jedoch auf Kosten von ε_i , δ_i , $\bar{\varepsilon}_k$, $\bar{\delta}_k$, d. h. desto schlechter werden dann (3) und (4) ausgeglichen. Aus dieser Tatsache erkennt man deutlich die Problematik der „freien Ecken“ in der elementaren Plattentheorie.

Indem man nun die letzten beiden Gleichungen von (17) mit n_1 und n_2 multipliziert und dann mit der transponierten Systemmatrix des linearen Gleichungssystems dieses von links multipliziert, erhält man ein quadratisches lineares Gleichungssystem von der Ordnung $(N + M) \cdot (N + M)$, aus dem α_ν und β_μ ermittelt werden können. Es läßt sich leicht zeigen, daß die so erhaltenen α_ν und β_μ in (17) eingesetzt die Bedingung (19) erfüllen.

Verwendet man nun die berechneten α_ν und β_μ in (12), so kann man nachträglich prüfen, ob die Randbedingungen (3), (4) und (5) im Mittel hinreichend gut befriedigt werden. Ist das der Fall, so ist (12) eine Näherungslösung des vorgelegten Problems. Wenn nicht, müssen weitere G_ν und G_μ in (12) berücksichtigt werden, und der Ausgleichvorgang für die Ränder „3“ und „4“ muß wiederholt werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß für den Spezialfall $\gamma = \pi/2$ und an den Rändern „1“ und „2“ beliebige Lagerung, jedoch freie Auflagerung an den Rändern „3“ und „4“, die GREENSche Funktion $H(r, \varphi; \varrho, \psi)$ dieses Halbkreisringsegmentes durch zwei GREENSche Funktionen des Kreisringes gemäß (6) exakt darstellbar ist, nämlich

$$H(r, \varphi; \varrho, \psi) = G(r, \varphi; \varrho, \psi) - G(r, \varphi; \varrho, \pi - \psi) \quad (20).$$

Literatur

- [1] K. GIERKMAN, Flächentragwerke, 3. Aufl., Wien 1954, Springer-Verlag, S. 166ff.
 [2] KH. NASITTA, Greensche Funktionen für dünne Kreisplatten, ZAMM 40 (1960), S. T 121—123; KH. NASITTA, Die dünne, frei aufgelagerte Kreisringplatte mit Einzellast, ZAMM 41 (1961), S. 31.

Anschrift: Priv.-Doz. Dr. KH. NASITTA, München-Neuaubing, Lisbergstr. 17

Vollständige Plattentheorie*)

Von H. NEUBER

Die Beschäftigung mit der zweidimensionalen Elastizitätstheorie ist so alt wie die Elastizitätstheorie selbst. Gerade auf diesem Zweig der theoretischen Mechanik haben die mathematischen Lösungsmethoden eine besonders hohe Stufe der Vervollkommenung erreicht. Der Grund liegt in der bekannten Tatsache, daß sich die eleganten Verfahren der Funktionentheorie anwenden lassen. Diese Möglichkeit ist dadurch gegeben, daß die charakteristische Differentialgleichung eine Bipotentialgleichung ist, deren Lösungen sich in bekannter Weise durch komplexe Funktionen darstellen lassen. Während der ebene Spannungszustand auf diese Weise einen gewissen Abschluß erfahren hat, zeigte sich beim eigentlichen Plattenproblem, d. h. die erste, auf KIRCHHOFF zurückgehende Fassung, bei welcher die Durchbiegung der Platte die Rolle einer Spannungsfunktion übernimmt, einer genauen Berücksichtigung der Randbedingungen und des Kraftflusses nicht entsprechen konnte. Der Grund lag in der auf die Balkentheorie zurückgehenden Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte. Wie E. REISSNER zeigte, läßt sich dieser Nachteil durch Berücksichtigung der Querkraftschubdeformation beheben, wobei mit Hilfe des Variationsprinzips eine Zusatzfunktion eingeführt wird. In der Folgezeit entdeckten verschiedene Forscher, u. a. ALBLAS, GREEN, KOITER, KOPPE, WEINEL und andere, nach und nach weitere Ergänzungen und zwar nicht nur zur Plattentheorie, sondern auch zur ebenen Elastizitätstheorie der Scheiben. Dadurch ist es nunmehr möglich geworden, beliebige Randbedingungen an jeder Stelle innerhalb der Plattendicke (d. h. für jedes z , z Abstand von der Plattenmittelfläche) zu erfüllen. Diese Funktionen gliedern sich in zwei Hauptgruppen, wobei die als Faktor auftretende von z abhängige Funktion entweder in z gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle handelt es sich um Funktionen

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

für Scheibenprobleme, im zweiten um solche für Probleme der Plattenbiegung. Die erste Spannungsfunktion der ersten Hauptgruppe enthält im wesentlichen die sogenannte AIRYSche Spannungsfunktion, welche aber durch z^2 -Glieder so ergänzt ist, daß die Grundgleichungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie erfüllt sind. Hinzu kommen zwei weitere Funktionentypen, welche der Differentialgleichung

$$\Delta\psi - \frac{\lambda^2}{h^2}\psi = 0 \quad (h = \text{Plattendicke})$$

genügen, wobei der Koeffizient λ für den zweiten Funktionentyp aus

$$\lambda = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

bei dem dritten Funktionentyp aus der Bedingung

$$\sin \lambda = -\lambda$$

zu berechnen ist. Im letzten Falle ergeben sich daher Funktionen mit komplexem Argument. In ähnlicher Weise baut sich die vollständige Theorie der gebogenen Platte auf. Der erste Funktionentyp entspricht im wesentlichen der KIRCHHOFFSchen Theorie, ist jedoch durch z^3 -Glieder so erweitert, daß alle Grundgleichungen erfüllt sind. Der zweite und dritte Typ enthalten wieder Funktionen, welche der oben angegebenen Differentialgleichung entsprechen, wobei der Koeffizient λ aus

$$\lambda = (2n - 1)\pi \quad \text{bzw.} \quad \sin \lambda = \lambda$$

zu berechnen ist. Die Funktionen der dritten Gruppe haben daher wieder komplexes Argument.

Vom Verfasser wird die Aufgabe in den Vordergrund gestellt, diesen vollständigen Lösungsapparat, der für viele Aufgabenstellungen große Bedeutung hat, u. a. auch für Probleme der Spannungskonzentration, für die praktische Anwendung in bequemerer Form nutzbar zu machen, als es an Hand der bisherigen Arbeiten möglich ist. Hierbei wird gezeigt, wie sich das ganze Lösungsschema hinsichtlich seiner Richtigkeit und Vollständigkeit mit Hilfe des Dreifunktionsansatzes der dreidimensionalen Elastizitätstheorie verhältnismäßig leicht kontrollieren läßt. Zunächst wird für den Dreifunktionsansatz selbst vom Vortragenden ein neuer Vollständigkeitsbeweis angegeben. Bezüglich der sechs Funktionentypen werden dann entsprechende Gleichungen für den Dreifunktionsansatz aufgestellt, wobei die vollständigen Ausdrücke für Verschiebungen und Spannungen in beliebigen Koordinaten abgeleitet werden. Durch Schnittbetrachtungen an der Platte werden Integralessagen für den Kraftfluß längs einer beliebigen Schnittlinie gewonnen. Diese Beziehungen werden dann als Bedingungen für die einzelnen Spannungsfunktionen gedeutet, wobei sich insbesondere für den lastfreien Rand Vereinfachungen ergeben; u. a. wird hierbei der sogenannte FLONSCHE Mittelwertsatz kontrolliert, wonach die AIRYSche Spannungsfunktion für die Ermittlung der über die Dicke genommenen Spannungsmittelwerte ausreicht. Es ergeben sich interessante Folgerungen für die ebene Elastizitätstheorie und die Auswertungsverfahren der Spannungsoptik. Bei Problemen der Plattenbiegung zeigt sich, daß die erste Funktion der zweiten Gruppe mit der REISSNERSchen Theorie nahezu übereinstimmt (wenn π^2 durch 10 ersetzt wird). Die vollständige Formulierung der Randbedingungen für Scheiben und Platten wird durch Entwicklung der von z abhängigen Glieder des jeweiligen ersten und dritten Typs in Reihen nach jenen trigonometrischen Funktionen, wie sie bei dem zweiten Typ auftreten, erzielt. Die Randbedingungen lassen sich dann als Aussagen über die Koeffizienten dieser Reihenentwicklung formulieren; sie ermöglichen die Erfüllung der Plattenrandbedingung für jedes z . Als Beispiel hierzu werden die Lösungen von ALBLAS für die gezogene und gebogene Platte mit kreisförmigem Loch diskutiert, wobei sich interessante Aufschlüsse über den Einfluß der Plattendicke auf den Verformungsmechanismus ergeben.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. H. NEUBER, Starnberg b. München, Max-Emanuel-Str. 10

On small damped vibrations of some particular vibrating systems with dynamic and mixed constraints

By DANILO RAŠKOVIĆ

The vibrating system consists of several connected mathematical pendula with dashpots, assuming that the damping force is proportional to the first power of the velocity. The kinetic and the potential energies and the dissipation function of a system performing small vibrations are homogeneous quadratic forms in the generalized velocities (\dot{q}) and coordinates (q) respectively, with constant coefficients [1], namely

$$2T = (\dot{q}) A \{\dot{q}\}, \quad 2V = (q) C \{q\}, \quad 2\Phi = (\dot{q}) B \{\dot{q}\}.$$

Here \mathbf{A} represents the inertia matrix, \mathbf{C} the elastic matrix and \mathbf{B} the dissipative matrix; $\{q\}$ is the column matrix and (q) the row matrix [2]. In the case of the system of mathematical pendula the masses of which are connected in series the above matrices can be determined successively; because of the acceleration constraints the matrix \mathbf{C} is a diagonal matrix.

By LAGRANGE's differential equations of motion the system of differential equations of motion may be written in the matrix form $\mathbf{A}\{\ddot{q}\} + \mathbf{B}\{\dot{q}\} + \mathbf{C}\{q\} = \{0\}$. To solve this system we assume that $\{q\} = \{r\} (\exp \lambda t)$, where $\{r\}$ is the amplitude vector and λ the eigenvalue. In the special case of homogeneous system (with equal masses $m_i = m$, equal lengths of pendula $l_i = l$, equal damping coefficients $b_i = b$, and equal distances of hanging points of dashpots $h_i = h$), the characteristic equation is $\Delta_n(\lambda) = |\lambda^2 \mathbf{N} + 2 \delta \lambda \mathbf{R} + \omega^2 \mathbf{D}| = 0$, where are $\mathbf{A} = m l^2 \mathbf{N}$, $\mathbf{B} = b l^2 \mathbf{R}$, $\mathbf{C} = m g l \mathbf{D}$, $n_{ii} = n - (i - 1)$, $n_{ik} = n_{ki} = n - (k - 1)$; $d_{ii} = n - (i - 1)$; $d_{ik} = 0$; $r_{ii} = r^2 + (n - i)$; $r_{ik} = r_{ki} = r + (n - k)$; and $2 \delta = b/m$, $\omega^2 = g/l$, $r = h/l$. After convenient transformations, the characteristic equation of this system may be expressed by means of JACOBI's matrices $|\lambda^2 \mathbf{I} + 2 \delta \lambda \mathbf{R}^* + \omega^2 \mathbf{J}| = 0$; here are \mathbf{I} the unit matrix; $j_{ii} = 2n - (2i - 1)$; $j_{i,i+1} = -(n - i)$, $j_{i,i-1} = -[n - (i - 1)]$, $j_{ik} = 0$ for $|i - k| > 1$; $r_{ii}^* = 2r^2 - 2r + 1$, $r_{i,i+1}^* = r_{i,i-1}^* = r(1 - r)$; $r_{ik}^* = 0$ for $|i - k| < 1$. The characteristic equations may be found by the use of formulae of regression obtained by simple expansion of the determinants, as follows

$$\Delta_n = [\lambda^2 + 2 \delta (2r^2 - 2r + 1) \lambda + (2n - 1) \omega^2] \Delta_{n-1} - [2 \delta r (1 - r) \lambda - (n - 1) \omega^2]^2 \Delta_{n-2} = 0.$$

In the even more special case, when the dampers are fastened to the masses themselves, the characteristic polynomial is the special LAGUERRE polynomial defined by the expression

$$\Delta_n(x) = |x \mathbf{I} + \mathbf{J}| = \sum_{r=0}^n r! \binom{n}{r}^2 x^{n-r} = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x) = L_n(-x),$$

of the new eigenvalue $x = \lambda(\lambda + 2\delta)/\omega^2$. This polynomial is orthogonal in the interval $-\infty < x < 0$ with the weight function e^x ; the normalization is given by $(n!)^2$, [3]. By means of the recurrence formula $L_n(x) = [x + (2n - 1)] L_{n-1} - (n - 1)^2 L_{n-2} = 0$ one obtains the linear homogeneous second order differential equation $x y'' + (1 + x) y' - n y = 0$, satisfied by this LAGUERRE polynomial, $y = L_n(x)$, [4]. This polynomial is the basic LAGUERRE polynomial of the variable $-x$ instead of the variable x . By means of the substitution $x = -u$, $y = v$ one obtains the differential equation $u v'' + (1 - u) v' + n v = 0$ satisfied by basic LAGUERRE polynomial $L_n(u)$, [5]. In the case of the pendula without damping ($b = 0$) the characteristic value is $\lambda = i \omega$, $i = \sqrt{-1}$, and the frequency polynomial is the basic LAGUERRE polynomial, [6].

When each string of the pendulum is restrained to a fixed base by spring the kinetic energy and the dissipation function remain the same as in preceding case, but the elastic matrix is the sum of two matrices: of the system without springs and of the stiffness matrix. In the case of a homogeneous system ($m_i = m$, $l_i = l$, $h_i = h$, and equal distances of hanging points of horizontal springs $p_i = p$) the characteristic equation is $\Delta_n = |\lambda^2 \mathbf{N} + 2 \delta \lambda \mathbf{R}^* + \omega^2 \mathbf{D} + \Omega^2 \mathbf{R}^*| = 0$, where are $\Omega^2 = 2c/m$, $r' = p/l$, $c = c_i$, with the recurrence formula

$$\Delta_n(\lambda) = [\lambda^2 + 2 \delta (2r^2 - 2r + 1) \lambda + \Omega^2 (2r'^2 - 2r' + 1) + (2n - 1) \omega^2] \Delta_{n-1} - [2 \delta r (1 - r) \lambda + r' \Omega^2 (1 - r') - (n - 1) \omega^2]^2 \Delta_{n-2} = 0.$$

The special system with springs fastened to the masses themselves ($m_i = m$, $l_i = h_i = p_i = l$, $r = r' = 1$) has the LAGUERRE polynomial as the characteristic one $\Delta_n(x) = |x \mathbf{I} + \mathbf{J}| = L_n(-x) = 0$ with the new characteristic value $x = (\lambda^2 + 2 \delta \lambda + \Omega^2)/\omega^2$. When the system is with springs but without damping one obtains the basic LAGUERRE polynomial as the frequency polynomial [7].

The same procedure may be used also in the case of several compound staff pendula connected in series. For the homogeneous system ($m_i = m$, $l_i = l$, $h_i = h$, $p_i = p$, $c_i = c$, $b_i = b$) the dynamic matrices are $\mathbf{A} = m l^2 \mathbf{N}/6$, $\mathbf{C}_1 = m g l \mathbf{D}/2$, $\mathbf{C}_2 = c l^2 \mathbf{R}'$, $\mathbf{B} = b l^2 \mathbf{R}$, with $n_{ii} = 6n - (6i - 2)$, $n_{ik} = 3[2n - (2i - 1)]$ for $i \neq k$, $d_{ii} = 2n - (2i - 1)$, $d_{ik} = 0$, \mathbf{R} and \mathbf{R}' are the same as in the precedent case; one obtains the following characteristic polynomial $|\lambda^2 \mathbf{N} + 12 \delta \lambda \mathbf{R} + 3 \omega^2 \mathbf{D} + 6 \Omega^2 \mathbf{R}'| = 0$.

For homogeneous system of pendula with the conditions $r = r' = 1$, e. i. when the dampers and springs are fastened to the end of each compound pendulum the characteristic equation is $\Delta_n(\lambda) = |\lambda^2 \mathbf{N} + 12 \delta \lambda \mathbf{I} + (3 \omega^2 \mathbf{D} + 6 \Omega^2 \mathbf{I})| = 0$.

In the problem of the vibration of the OBERBECK mathematical and compound staff pendula connected in series and with dampers the dynamic matrices are expressed as supermatrices and the corresponding characteristic polynomials as the product of the characteristic polynomials of each system.

Because of the damping it is necessary to solve the stability problem also.

References

- [1] E. T. WHITTAKER, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed., Cambridge 1937.
- [2] R. ZURMÜHL, Matrizen, Berlin, 1950.
- [3] G. SZEGÖ, Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc., New York 1939.
- [4] R. COURANT and D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, Vol. I, Inter. Publ., Inc., New York 1953.
- [5] KAMKE, Differentialgleichungen, Bd. I., Leipzig 1944, S. 428.
- [6] O. BOTTEMA, Die Schwingungen eines zusammengesetzten Pendels, Jahr. der Deutsch. Math. Vereinigung XLII (1932).
- [7] D. RAŠKOVIĆ, Über die Eigenschaften der Frequenzgleichungen eines schwingenden Systems, ZAMM 37 (1957).

Anschrift: Dr.-Ing. Dipl. Math. DANILO RAŠKOVIĆ, Timočka 46, Belgrad, Jugoslawien

Abschätzung von Übergangsprozessen

Von ROLF REISSIG

Häufig interessiert man sich nicht nur für die asymptotische Stabilität eines bestimmten Prozesses in einem dynamischen System, sondern man fragt darüber hinaus nach dem zeitlichen Verlauf der Übergangsprozesse oder vielmehr nach Charakteristiken dieses Zeitverlaufes, insbesondere nach der Abklingzeit. Solche Fragen lassen sich mit Hilfe der direkten Methode von LJAPUNOW beantworten, ohne daß man die analytische Gestalt der zu untersuchenden Prozesse kennt; vielmehr genügen oft sehr allgemeine Kenntnisse, z. B. gemeinsame Schranken für die Koordinaten aller Prozesse. Das bei der Abschätzung von Übergangserscheinungen einzuschlagende Verfahren wollen wir am einfachen Beispiel der DUFFINGschen Gleichung

$$\begin{aligned}x'' + 2\gamma x' + k^2(x + \beta x^3) &= e(t) \quad \text{bzw.} \\x' &= y, \quad y' = -k^2(x + \beta x^3) - 2\gamma y + e(t) \\[\gamma, k, \beta > 0; \gamma < k]\end{aligned}$$

erörtern. Man weiß, daß die Lösungen $\{x(t), y(t)\}$ gleichmäßig beschränkt sind, so daß

$$|x(t)| \leq a, \quad |y(t)| \leq b \quad \text{für} \quad t \geq t_0;$$

die Schranke a kann man folgendermaßen abschätzen:

$$a < \frac{2M}{\gamma k} = a + h \quad [M = \text{Max } |e(t)|].$$

Untersucht man die Stabilität einer Lösung $\{x(t), y(t)\}$, so beschränkt man sich auf den Zeitraum $t \geq t_0$ und schreibt die Nachbarlösungen in der Form $x(t) + u$, $y(t) + v$, wobei man $|u(t)| \leq h$ verlangt. [Das kann man durch $|u(t_0)| \leq \delta(h)$ erreichen, wie sich im Laufe des Verfahrens zeigt.] Für die Störungen $\{u(t), v(t)\}$ erhält man das Gleichungssystem

$$u' = v, \quad v' = -k^2[1 + \beta \sigma(u, t)]u - 2\gamma v,$$

wobei

$$\sigma(u, t) = 3x^2(t) + 3x(t)u + u^2; \quad 0 \leq \sigma \leq 3(a + h)^2 = \frac{12M^2}{\gamma^2 k^2}.$$

Zur Stabilitätsuntersuchung kann man nun zwei Wege einschlagen: Man kann mit einer einfachen, unstetigen LJAPUNOWschen Funktion arbeiten, man kann aber auch aus den bekannten Stabilitätsverhältnissen im linearen Fall Schlüsse über das Verhalten des nichtlinearen Systems herleiten (Verfahren von AISERMAN).

Um den ersten Weg zu benutzen, setzen wir

$$k'^2 = k^2 \left(1 + \frac{12\beta M^2}{\gamma^2 k^2} \right) \quad (\text{Maximalwert des Rückstellfaktors})$$

und definieren die folgenden Funktionen von u, v :

$$W_i(u, v) = \frac{k^2 + k'^2}{4} u^2 + \frac{(-1)^i (k'^2 - k^2)}{4} u^2 \operatorname{sgn}(uv) + \frac{1}{2} v^2 \quad (i = 1, 2).$$

Vermöge der Störungsgleichungen berechnet man für $v \neq 0$

$$(-1)^i \left\{ \frac{d}{dt} W_i(u, v) + 2\gamma v^2 \right\} \geq 0.$$

Auf der u -Achse sind beide Funktionen unstetig; beim Umlauf um O im Uhrzeigersinn registriert man dort den Sprung $(-1)^{i-1} (k'^2 - k^2) u^2/2$.

Die Trajektorien der Gleichungen

$$\frac{d}{dt} W_i(u, v) = -2\gamma v^2, \quad \frac{du}{dt} = v$$

winden sich in der uv -Ebene (im Uhrzeigersinn) spiralenförmig um den Ursprung O und schließen die Störungskurven $\{u(t), v(t)\}$ von außen bzw. innen ein. Sie konvergieren gegen 0 , wenn man fordert:

$$\frac{k'}{k} \exp[-\gamma \pi / \sqrt{k'^2 - \gamma^2}] = e^{-\lambda} < 1.$$

Damit ist also die asymptotische Stabilität der betrachteten Lösung $\{x(t), y(t)\}$ gesichert; aber auch ein Maß für das Abklingen der Störungen ist gegeben.

Sind nämlich $\{t_n\}$ die aufeinanderfolgenden Nullstellen von $v(t) = u'(t)$ und $|u_n| = |u(t_n)|$ die Störampplituden, so gilt

$$|u_n| < |u_{n-1}| e^{-\lambda}.$$

Für die Zeitdauer $t_n - t_{n-1}$ berechnet man auf Grund der Darstellung

$$t_n - t_{n-1} = \int_{u_{n-1}}^{u_n} \frac{du}{v}$$

und mit Rücksicht darauf, daß sich der betreffende Bahnbogen von oben und unten durch bekannte Spiralenbögen einschließen läßt, die Schranke

$$t_n - t_{n-1} < T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}.$$

Deshalb erhält man im Intervall $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$|u(t)| \leq |u_n| < |u_{n-1}| e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})/T} < |u_1| e^{-\lambda(t_n - t_1)/T} < \kappa \{\text{Max } |u(t)|\} e^{-\lambda(t_n - t_0)/T}; \quad \kappa = e^{\lambda}.$$

Für $|u(t)|$ ergibt sich eine Majorante in Gestalt einer Treppenkurve mit exponentiell abnehmender Höhe.

Schlägt man den zweiten Weg ein, so findet man auf der Grundlage des Begriffes der exponentiellen Stabilität eine Majorante für $\varrho = \sqrt{u^2 + v^2}$ in Form einer Exponentialfunktion.

Man setzt zunächst $\beta = 0$ und bestimmt für die Störungsgleichungen als LJAPUNOWSche Funktion eine positiv-definite quadratische Form

$$W(u, v) = A u^2 + 2 B u v + C v^2,$$

indem man vorschreibt:

$$\frac{dW}{dt} = -4\gamma k^2 \varrho^2.$$

Man zieht dann das nichtlineare Glied ($\beta \neq 0$) in Rechnung und verlangt über dem gesamten σ -Intervall:

$$\frac{dW}{dt} \leq -4\gamma k^2 \vartheta \varrho^2 \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Das gibt die Bedingung

$$3\beta M^2 = \frac{(1 - \vartheta) \gamma^3 k^2}{(1 + k^2)^2} [2\gamma + 2k\sqrt{q}]; \quad 4k^2 q = 4\gamma^2 + (1 + k^2)^2.$$

Für $t \geq t_0$ besteht dann die Abschätzung

$$\varrho(t) \leq \kappa \varrho_0 e^{-(t - t_0)/T}$$

mit

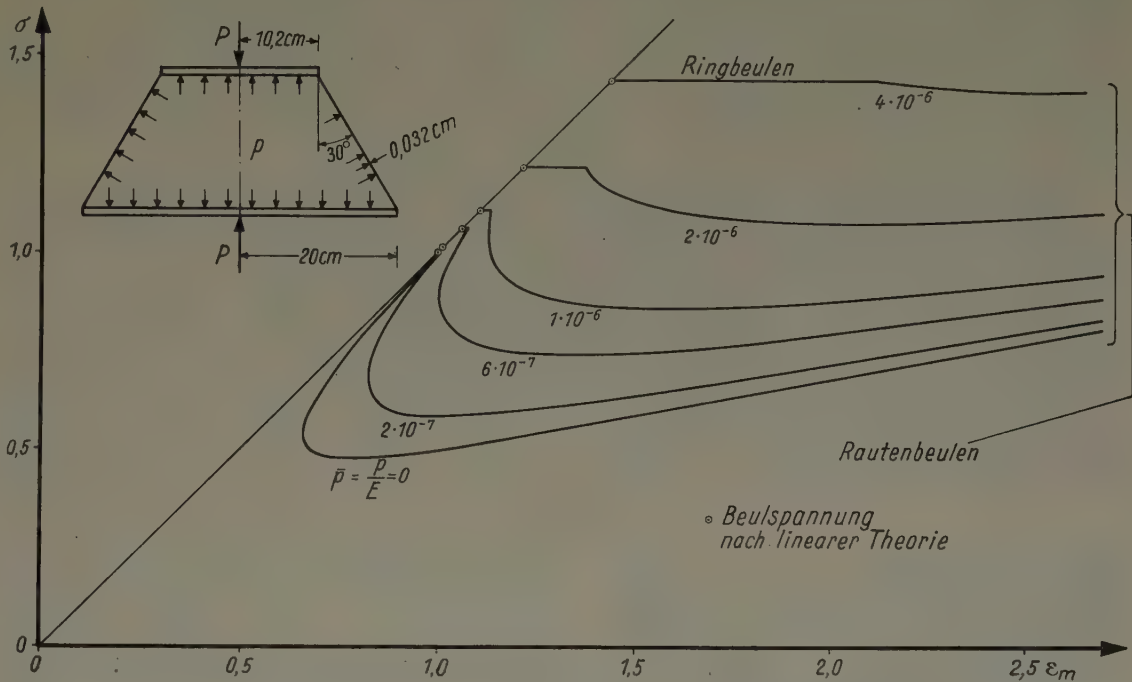
$$\kappa = \sqrt{q} + \sqrt{q - 1}, \quad T = \frac{q}{\gamma \vartheta} [1 + \sqrt{1 - 1/q}].$$

Anschrift: Prof. Dr. ROLF REISSIG, Berlin-Weißensee, Bundenbacher Weg 5

Die dünnwandige Kegelschale unter Axial- und Innendruck

Von WALTER SCHNELL*)

Mit der Entwicklung moderner Flugkörper hat das Problem des elastischen Stabilitätsverhaltens von Kegelschalen in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Während für Zylinder- und Kugelschalen eine Reihe von Arbeiten erschienen sind, die unter Einführung nichtlinearer Theorien (Berücksichtigung großer Verformungen) einen Einblick in das Beul- und Nachbeulverhalten dieser Tragwerke unter verschiedenen Belastungen gestatten, wurde die Stabilität der Kegelschale wegen zusätzlicher mathematischer Schwierigkeiten bisher nur wenig behandelt.



Nachbeulkurven einer axialbelasteten Kegelschale in Abhängigkeit vom Innendruck

Es werden daher zunächst die kritischen Lasten einer axialgedrückten Kegelstumpfschale nach der linearen Theorie ermittelt. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von [1] und [3] zeigt, daß die Beullasten aus einem eingliedrigen Produktansatz

$$w = A \sin \kappa z \cos \eta \theta \quad \dots \dots \dots (1)$$

(„Schachbrett“-beulen) mit numerisch ausreichender Genauigkeit ermittelt werden können (w = Radialverschiebung beim Beulen, z, θ = bezogene Koordinaten auf dem Kegelmantel, κ, η = Wellenlängen).

Wird die Schale zusätzlich durch Innendruck vorgespannt, so findet man einen linearen Anstieg der Beullasten mit p , wobei mit $\eta \rightarrow 0$ in (1) nun „Ringbeulen“

$$w = A \sin \kappa z \quad \dots \dots \dots (2)$$

beim Übergang des belasteten unausgebeulten Kegels in den infinitesimal benachbarten Beulzustand auftreten.

Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt aber, daß — ähnlich wie bei der axialgedrückten Zylinderschale — die nach dieser klassischen Theorie ermittelten Beulspannungen viel zu hoch liegen.

Es werden daher die Grundgleichungen einer nichtlinearen Theorie für die Kegelschale aufgestellt, wobei nur die wichtigsten quadratischen Glieder in den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen berücksichtigt werden. Nach Einführen einer Spannungsfunktion F erhält man zwei

*) Institut für Festigkeit der DVL, Mülheim/Ruhr. Die Untersuchungen wurden durch eine Beihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft dankenswerterweise gefördert.

gekoppelte partielle nichtlineare Differentialgleichungen für F und w , die näherungsweise mit Hilfe der Energiemethode gelöst werden. Dabei enthält der Ansatz

$$w = A \sin \kappa z \cos \eta \theta + B \cos 2 \kappa z + C \dots \dots \dots (3),$$

der eine erste Näherung für die im Versuch beobachteten „Rauten“-beulen darstellt, vier freie Parameter A , B , κ und η (C folgt aus Randbedingungen). Minimalisierung der gesamten potentiellen Energie nach diesen vier Freiwerten gibt dann ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem, aus dem — für gegebene Axialkraft — die Gleichgewichtslagen im Nachbeulbereich ermittelt werden können. Schließlich kann man eine Beziehung zwischen der aufgetragenen Last und der mittleren Stauchung ε_m aufstellen und kann damit diese im Versuch gemessenen Größen unmittelbar mit den theoretischen Werten vergleichen. Das Bild zeigt ein Ergebnis solcher Rechnungen, die auf einem Digitalrechner durchgeführt wurden. In dem Bild ist die — auf den kritischen Wert σ_0 des Kegels ohne Innendruck bezogene — Spannung am oberen Rand der Kegelstumpfschale über der Stauchung mit $\bar{p} = p/E$ als Parameter aufgetragen. Man erkennt, wie sich von der Geraden des unausgebeulten Zustandes bei den kritischen Lasten der linearen Theorie Nachbeullösungen verzweigen. Bei kleinen Innendrüken ist ein merkliches „Durchschlagen“ nach Erreichen der klassischen Beullast zu erwarten. Bei höheren Drücken treten zunächst Ringbeulen auf, die dann unter geringerem Lastabfall in Rauten übergehen.

Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigt, daß die nichtlineare Theorie das grundsätzliche Beul- und Nachbeulverhalten der Kegelschale richtig zu beschreiben vermag. Quantitative Abweichungen zwischen Theorie und Versuch, die noch auftreten, haben zwei Ursachen:

a) setzt die Theorie eine ideal glatte Schale voraus, während in Wirklichkeit unvermeidliche Vorbeulen auftreten, die den Beulbeginn merklich herabdrücken können.

b) müßte der Ansatz [3] durch Mitnahme weiterer Glieder ergänzt werden, was allerdings den Rechenaufwand erheblich heraufsetzt.

Eine ausführliche Darstellung der in diesem Auszug nur angedeuteten Theorien soll in der Zeitschrift für Flugwissenschaften erscheinen.

Literatur

- [1] P. SEIDE, Notes on Analysis and Design of Right Circular Conical Shells, Ramo-Wooldridge Comp., Rep. No. AM 5—10 (1955).
- [2] P. SEIDE, A Donnell Type Theory for Asymmetrical Bending and Buckling of Thin Conical Shells, J. Appl. Mech. 24 (1957), p. 547—532.
- [3] KH. M. MUSHTARI und A. V. SACHENKOW, Stability of Cylindrical and Conical Shells of Circular Cross Section with Simultaneous Action of Axial Compression and External Normal Pressure, Prikladnaja Matematika i Mekhanika 18 (1945), (Engl. Übersetzung NACA TM 1433 (1958)).
- [4] P. SEIDE, On the Buckling of Truncated Conical Shells under uniform Hydrostatic Pressure, Proceed. IUTAM-Symp. Delft 1959, p. 363—386.

Anschrift: Dr. W. SCHNELL, Essen, Florastr. 52

Beitrag zum Keil mit einem Moment an der Spitze

Von G. SONNTAG

Ein Keil nach Bild 1 wird nur an der Keilspitze durch ein Moment in der Keilebene belastet. Die Spannungen der bekannten Lösung lauten [1]

$$\sigma_r = -\frac{2M}{r^3} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta},$$

$$\sigma_t = 0,$$

$$\tau_{rt} = \frac{M}{r^3} \cdot \frac{\cos 2\beta - \cos 2\varphi}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta}.$$

Für einen Keilwinkel $2\beta = 257^\circ$ wird der Nenner in den Gleichungen, null und es ergeben sich in der gesamten Keilscheibe unendlich große Spannungen. Mit diesem „Paradoxon“ haben sich STERNBERG und KOITER [2] theoretisch befaßt. Hiernach gilt die klassische Lösung für Keilwinkel $2\beta < 257^\circ$. Für Keilwinkel von 257° und darüber geben STERNBERG und KOITER Ausdrücke an, die zu keiner physikalisch befriedigenden Aussage führen.

Das Versagen der klassischen Lösung läßt sich physikalisch begründen. Sie besteht aus zwei Spannungsfunktionen, von denen die erste die Spannungen aus einem Moment in der Vollscheibe beschreibt. Schneidet man aus der durch ein Moment belasteten Vollscheibe einen Keil heraus, dann befinden sich an den Schnittgeraden Schubspannungen; diese Ränder müssen aber spannungsfrei werden. Diese Aufgabe erfüllt die zweite Spannungsfunktion. Die Konstanten lassen sich leicht so bestimmen, daß die Keilflanken lastfrei werden. Damit ist aber nur scheinbar alles in Ordnung.

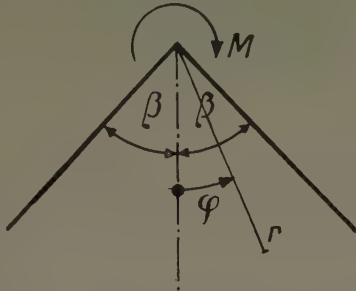


Bild 1. Keil mit Momentenbelastung M der Spitze.
 2β Keilwinkel, φ Winkelcoordinate,
 r Abstandskoordinate von der Keilspitze

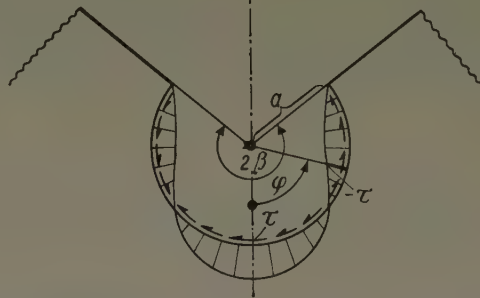


Bild 2. Schubspannungsverteilung über einem Bogen vom Radius a einer stumpfen Ecke vom Keilwinkel $2\beta = 257^\circ$ nach der klassischen Lösung (kritischer Fall). Die Spannungen liefern kein Moment

Bild 2 zeigt für den kritischen Fall einer Keilecke von 257° die Schubspannungsverteilung auf einem Bogen vom Radius a . Die Erfüllung der Randbedingung $\tau = 0$ an den Keilflanken ergibt in diesem Fall Schubspannungen, die kein resultierendes Moment liefern. Das besagt lediglich, daß dieser Ansatz nicht geeignet ist, die Spannungen aus einer Momentenbelastung zu beschreiben. Wenn man die Spitze über einem Kreisbogen vom Radius a abschneidet und gemäß der Abbildung mit Schubspannungen belastet (und zusätzlich mit den nicht gezeichneten Spannungen σ_r), dann liefert der klassische Ansatz für diese Belastung die strenge endliche Lösung, aber kein Moment.

Es erhebt sich die Frage bis zu welchem Keilwinkel die klassische Lösung gültig ist. Die Schubspannungen müssen einer Momentenbelastung das Gleichgewicht liefern. Im kritischen Fall wechseln die Schubspannungen über einen Bogen vom Radius a zweimal die Richtung und liefern kein Moment. Da überall $\sigma_t = 0$ ist, kann man den Keil längs der Geraden, an denen $\tau_{rt} = 0$ ist, aufschneiden. Damit zerfällt die Keilscheibe in drei unabhängige Keile, deren Spitzen in wechselnder Richtung durch Momente belastet sind. Dieser Richtungswechsel der Schubspannungen und damit Zerfall des Keiles tritt bereits für Keilwinkel $2\beta > 180^\circ$ ein. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint der klassische Ansatz nur für Keile bis zur Halbebene geeignet, um die Spannungen aus einer Momentenbelastung zu beschreiben. Da man für jeden Keilwinkel über einen Bogen vom Radius a eine Belastung einleiten kann, die ein reines Moment ergibt und der Radius a beliebig klein sein kann, muß für einen beliebigen Keilwinkel eine Lösung existieren.



Bild 3. Spannungsoptische Aufnahme des kritischen Keiles ($2\beta = 257^\circ$). Das Moment M wird von einem Zapfen vom Radius a eingeleitet. Linien (Isochromaten) sind geometrischer Ort gleicher Hauptschubspannung

Es muß also auch für den kritischen Winkel eine Grundlösung existieren, deren Spannungen mit r^{-2} abklingen. Weicht die über den Bogen $r = a$ vorgegebene Randbelastung von dieser Grundlösung ab, dann ist ihr eine Belastung überlagert, deren Spannungen schneller als mit r^{-2} abklingen; diese Spannungen können aber weder eine resultierende Kraft noch ein Moment ergeben. Für $r \gg a$ muß die Grundlösung der Momentenbelastung übrig bleiben. Da es noch nicht gelungen ist, die Aufgabe zu lösen, wurden spannungsoptische Versuche durchgeführt.

Bild 3 zeigt den kritischen Fall. Über einem runden Zapfen wird ein reines Moment eingeleitet. Man erkennt, daß im größten Bereich des Keiles die Schubspannungsverteilung wie in der Vollscheibe erfolgt (konzentrische Kreise der Isochromaten) und erst zu den Rändern hin eine Änderung eintritt, damit diese lastfrei werden.

Für die Halbscheibe zeigte sich ein zunächst überraschendes Ergebnis. Nach der für die Halbscheibe noch gültigen klassischen Lösung verschwindet längs des Randes neben der Schubspannung auch die Spannung σ_r ; der Rand müßte eine 0-Isochromate ergeben (das Bild ist hier nicht wiedergegeben). Es existierte aber eindeutig eine Randspannung σ_r . Dieses abweichende Verhalten läßt sich theoretisch in der größeren Steifigkeit des beidseitig der Scheibe vorragenden Zapfens nachweisen. Der Einfluß des äußeren Widerlagers der Kreisscheibe zeigte sich demgegenüber als vernachlässigbar klein. Dieses Verhalten war zu erwarten, da die Spannungen ihren Ursprung im Zentrum der Scheibe haben und nach außen hin schnell abklingen.

Mit diesen Experimenten und ihrer Deutung ist aber das allgemeine Problem noch immer nicht gelöst. Ähnliche Schwierigkeiten treten auch bei Belastungen der Keilflanken auf, worüber demnächst berichtet wird.

Eine ausführlichere Darstellung folgt in Forschung Ing. Wes. 27 (1961), Heft 6.

Literatur

- [1] vgl. z. B.: L. FÖPPL, Drang und Zwang, R. Oldenbourg, München 1947, 3. Bd., S. 33 oder K. GIRMANN, Flächentragwerke, 5. Aufl., Wien 1959, Springer-Verlag, S. 140.
 [2] E. STERNBERG und W. T. KOITER, The Wedge Under a Concentrated Couple: A Paradox in the Two-Dimensional Theory of Elasticity, J. Appl. Mech., Paper No. 58-A-15.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. habil. GERHARD SONNTAG, München 2, Olgastr. 2/III

Über das Nachbeulverhalten axialgedrückter orthotroper Zylinder endlicher Länge

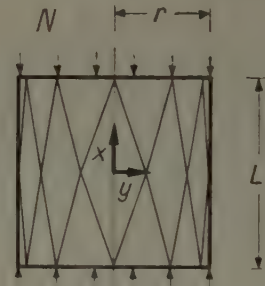
VON WILHELM THIELEMANN UND FRANZ JOSEF HEINRICHSBAUER*)

Das elastische Beulen von dünnwandigen Kreiszyklinderschalen unter Axialdruck ist seit langer Zeit Gegenstand vieler theoretischer und experimenteller Untersuchungen. Der Grund hierfür liegt in der großen Diskrepanz zwischen den Ergebnissen der klassischen, linearen Stabili-

Symmetrische Beulform

$$w = b_{00} + b_{10} \cos \frac{\pi x}{L} + b_{30} \cos \frac{3\pi x}{L} \quad 1a$$

$$+ b_{11} \cos \frac{\pi x}{L} \cos \frac{n y}{r} + b_{31} \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{n y}{r}$$



Antimetrische Beulform

$$w = b_{00} + b_{10} \cos \frac{\pi x}{L} + b_{50} \cos \frac{5\pi x}{L} + b_{70} \cos \frac{7\pi x}{L} \quad 1b$$

$$+ b_{21} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{n y}{r} + b_{41} \sin \frac{4\pi x}{L} \sin \frac{n y}{r}$$

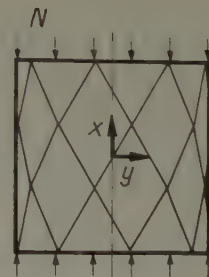


Bild 1. Näherungsansätze für symmetrische und antimetrische Beulformen

tätstheorie kleiner Deformationen und den Versuchswerten. Erst durch die Einführung einer nichtlinearen Schalentheorie großer Deformationen ist es gelungen, diese Diskrepanz im wesentlichen zu erklären und das Beul- und Nachbeulverhalten axialgedrückter Kreiszyklinderschalen besser zu verstehen. Unter einer größeren Zahl von noch offenen Fragen wurde der Einfluß der Zylinderlänge auf Beulast und Beulform im Rahmen einer nichtlinearen Theorie bisher kaum untersucht.

*) Aus dem Institut für Festigkeit der DVL, Mülheim/Ruhr. Die Untersuchungen wurden durch eine Beihilfe der Deutschen Forschungsgemeinschaft dankenswerterweise gefördert.

Nach der linearen Stabilitätstheorie gibt es beim Beulen eines axialgedrückten, orthotropen Zylinders zu jeder Zylinderlänge eine kleinste klassische Last, die mit einer bestimmten Anzahl von Wellen in Umfangs- und Längsrichtung verbunden ist. Mit der Länge ändert sich die Anzahl der Wellen, die klassische Last jedoch ist praktisch konstant. Dagegen kann das Nachbeulverhalten, das nur mit Hilfe einer nichtlinearen Theorie zu erfassen ist, noch sehr von der Zylinderlänge abhängen.

Das Verhalten axialgedrückter, orthotroper Kreiszyylinder im Nachbeulbereich wird nach der nichtlinearen Theorie mit den bekannten Vereinfachungen von DONNELL beherrscht von einem System gekoppelter, partieller, nichtlinearer Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion F und die Beulfunktion w . Den für eine Näherungslösung nach der Energiemethode benötigten Ansatz für die Beulfunktion w versuchten wir den in Versuchen beobachteten Beulformen anzupassen.

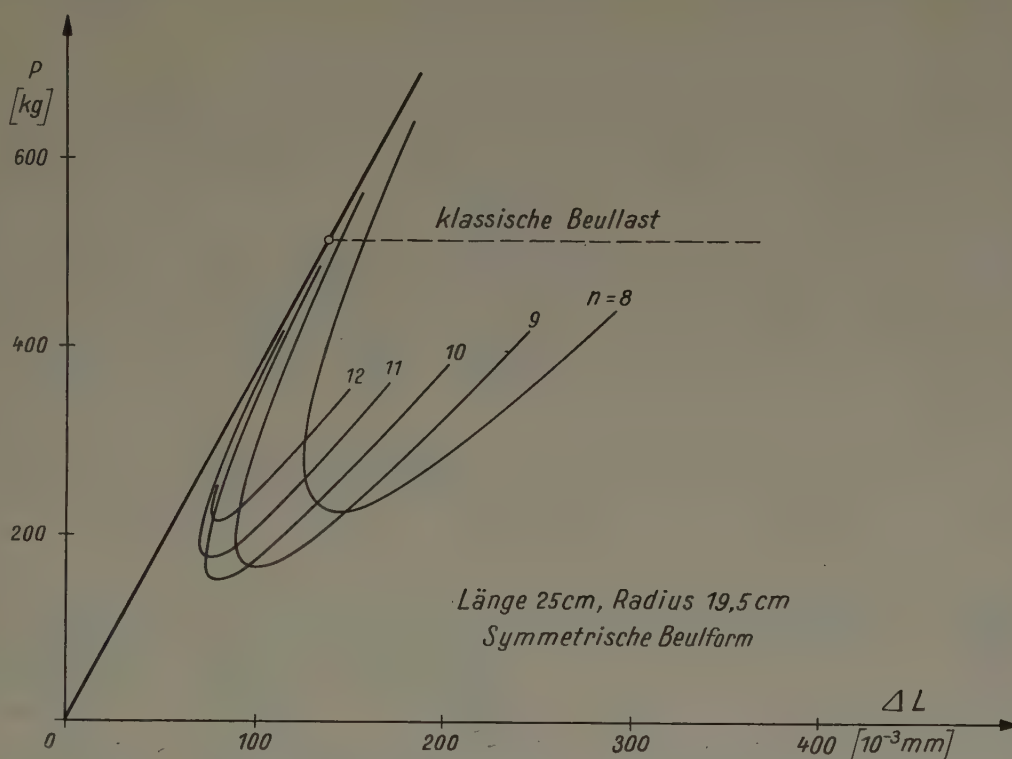


Bild 2. Theoretische Nachbeulfunktionen des axialgedrückten, orthotropen Zylinders endlicher Länge

Der Näherungsansatz für eine symmetrische Beulform (Bild 1, Gl. 1 a), mit w = Radialverschiebung beim Beulen, x = Längskoordinate, y = Umfangskoordinate, L = Zylinderlänge, r = Zylinderradius, n = Wellenzahl in Umfangsrichtung, beschreibt Beulformen, bei denen sich Rauten mit ihrer ganzen Länge in die Zylinderlänge einpassen. Der Ansatz für eine antisymmetrische Beulform (Bild 1, Gl. 1 b) stellt von den Rändern begrenzte, versetzte Rautenbeulen dar.

Im Gegensatz zu bisherigen theoretischen Untersuchungen von unendlich langen, orthotropen Kreiszyklindern (vgl. [1], [2]) ist die Wellenlänge in Längsrichtung nun bekannt. An den Rändern soll die Kreisform des Zylinders erhalten bleiben:

$$w(\pm L/2) = b_{00},$$

und die Lagerung gelenkig sein:

$$\frac{\partial^2 w(\pm L/2)}{\partial x^2} = 0.$$

Das Minimum der gesamten potentiellen Energie — ermittelt für je ein bestimmtes, ganzzahliges n — liefert ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die Freiwerte b_{ik} . Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für eine gegebene Belastung wurde mit einem Digitalrechner bestimmt. Aus einer zusätzlichen Beziehung zwischen Belastung und mittlerer Stauchung ergeben sich dann für ein Beispiel eines längsversteiften, orthotropen Zylinders die in Bild 2 dargestellten Nachbeulfunktionen.

Aus seinem unausgebeulten Zustand (Gerade in Bild 2) wird der Zylinder vor Erreichen der klassischen Last infolge Störungen in einen stabilen Gleichgewichtszustand „durchschlagen“, der mit endlichen Deformationen verbunden ist und durch die Nachbeulfunktionen beschrieben wird.

Dabei wird er in einer Beulform mit einer solchen Anzahl von Umfangswellen n beulen, welche die kleinste potentielle Energie beinhaltet. Bei weiterer Zusammendrückung beharrt er in seinem ausgebeulten stabilen Gleichgewichtszustand mit einem bestimmten n , wie die Versuche bestätigen.

Die theoretisch ermittelten Nachbeulfunktionen für antimetrische Beulformen verlaufen im ganzen flacher als die der symmetrischen Formen. Die Minimallast im Nachbeulbereich steigt an, der starke Lastabfall beim „Durchschlagen“ (isotroper Zylinder: Versuchswerte bis zu 12% der klassischen Last) wird kleiner. Daraus erkennt man die Bedeutung der Beulform für das Beulverhalten von Zylindern endlicher Länge.

Vergleicht man das theoretisch ermittelte Nachbeulverhalten mit den Versuchsergebnissen, so stellt man eine gute, grundsätzliche Übereinstimmung in der Tendenz der Nachbeulfunktionen fest. Eine quantitative Übereinstimmung kann man nicht erwarten, u. a. wegen der anderen Randbedingungen im Versuch

$$\left(w(\pm L/2) = \frac{\partial w(\pm L/2)}{\partial x} = 0 \right),$$

der Approximation des theoretischen Verfahrens und der Nichtberücksichtigung von Vorbeulen.

Die hier zusammengefaßt dargestellten Untersuchungen sollen in Kürze ausführlich veröffentlicht werden.

Literatur

- [1] W. SCHNELL, Zur Stabilität dünnwandiger längsgedrückter Kreiszylinderschalen bei zusätzlichem Innendruck, DVL-Bericht Nr. 146, Proceed. IUTAM-Symp. Delft 1959, p. 167—188.
- [2] W. F. THIELEMANN, New Developments in the Nonlinear Theories of the Buckling of Thin Cylindrical Shells, repr. fr. "Aeronautics and Astronautics", p. 76—121, Pergamon Press 1960.

Anschriften: Prof. Dr.-Ing. W. THIELEMANN, Braunschweig-Kralenriede, DFL, Inst. f. Flugzeugbau
Dipl.-Ing. FR. JOS. HEINRICHSBAUER, DVL, Inst. f. Festigkeit, Mülheim/Ruhr, Flughafen

Ein Beitrag zur theoretischen Lösung der kurzen dickwandigen Kreiszylinderschale

Von J. VALENTA

Mit der Lösung des kurzen dickwandigen Kreiszylinders haben sich schon mehrere Verfasser befaßt. Die vorgelegten Lösungen sind mehr oder weniger annähernd. Außerdem sind diese Methoden trotz gewisser Vereinfachungen in einigen Fällen numerisch zu zeitraubend und machen eine intensive rechnerische Arbeit erforderlich.

Im folgenden wird ein vereinfachtes Verfahren für die Lösung dieses schwierigen Problems vorgeschlagen, das auf der Lösung eines Trägers auf elastischer Unterlage beruht. Der Zylinder ist in bestimmten Abschnitten seiner Länge mit dreh-symmetrischen kontinuierlichem Radialzug oder-druck belastet (vgl. Bild). Die Randbedingungen auf den Stirnflächen der Schale sind im Integralsinn erfüllt.

Bezeichnet man die Verschiebung in der Radialrichtung mit u (positiv in der Richtung von

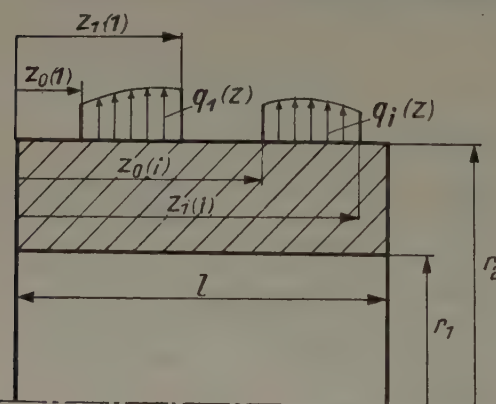
der Rotationsachse ab), in der Achsialrichtung mit w (positiv in der Richtung der z -Achse), ergeben sich die Deformationsbeziehungen für eine orthotrope Zylinderschale in der folgenden Form:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{zr}}{E_z} \sigma_z \quad \dots \quad (1),$$

$$\frac{u}{r} = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \frac{\nu_{r\theta}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_z} \sigma_z \quad \dots \quad (2),$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{rz}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} \sigma_\theta \quad \dots \quad (3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\tau_{rz}}{G_{rz}} \quad \dots \quad (4),$$



wobei gilt

$$E_r \cdot \nu_{\theta r} = E_\theta \cdot \nu_{r\theta}, \quad E_\theta \nu_{z\theta} = E_z \nu_{\theta z}, \quad E_z \nu_{rz} = E_r \nu_{zr} \quad \dots \quad (5).$$

Darin bedeuten

- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ — Radial-, Umfangs- und Achsenspannung,
 E_r, E_θ, E_z — Elastizitätsmoduln in Radial-, Umfangs- und Achsenrichtung,
 $\nu_{\theta r}$ — Kehrwert der Poissonschen Konstanten in der Radialrichtung bei der Wirkung σ_θ usw.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad \dots \quad (6),$$

$$\frac{\tau_z}{r} + \frac{\partial \tau_z}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \dots \quad (7).$$

Das Gleichungssystem (1) bis (4) und (6), (7) hat eine einfache Lösung für $E_r \rightarrow \infty$ (der Behälter ist in der Radialrichtung vollkommen starr) und $\nu_{z\theta} = 0$. Die Verschiebung u ist in diesem Falle bloß Funktion der Koordinate z und $\sigma_\theta = \frac{E_\theta}{r} u(z)$. Die Schale wird also ähnlich wie ein Träger deformiert, wobei die Umfangsspannung als eine elastische Unterlage wirkt. Vernachlässigt man das erste Glied in der Gl. (7), dann drückt diese Gleichung die Gleichgewichtsbedingung des Trägerelements in der Richtung der Achse z aus und ist erfüllt, wenn gilt

$$\tau_z = -\frac{3}{2} \frac{E I}{h} \left(1 - \frac{4 \eta^2}{h^2}\right) u'''(z) \quad \dots \quad (8),$$

$$\sigma_z = -E \cdot \eta u''(z) \quad \dots \quad (9),$$

wo
$$I = \frac{1}{12} h^3 \cdot 1, \quad r = r_s + \eta, \quad -\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2}$$

und r_s — den mittleren Halbmesser und h die Schalendicke darstellen.

Auf Grund der Analogie mit dem Träger setze man den Verlauf der Radialspannung in der Form

$$\sigma_r = \frac{(h + 2\eta)^2 (h - \eta)}{2 h^3} \sum_{i=1}^n F_{z_0(i)}^{z_{1(i)}} q_i(z) \quad \dots \quad (10)$$

voraus, wo

$$F_a(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon < 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{z - a}$$

und

$$F_a^b = F_a(z) - F_b(z).$$

Werden die Ausdrücke (8) bzw. (10) für τ_z und σ_r in die restliche Gleichgewichtsgleichung (6) eingesetzt und wird die Integration über die Schalendicke durchgeführt, ergibt sich tatsächlich eine Differentialgleichung des Trägers auf elastischer Unterlage

$$u^{IV}(\xi) + 4 u(\xi) = \frac{4}{k} \left(1 + \frac{h}{2r}\right) \sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)}^{\xi_{1(i)}} \bar{q}_i(\xi) \quad \dots \quad (11),$$

wo

$$\xi = \sqrt[4]{\frac{3}{r_1 \cdot r_2 h^2}} z, \quad k = \frac{E h}{r_1 r_2},$$

$$\bar{q}_i(\xi) = q_i(\xi) - q_{s(i)}, \quad q_{s(i)} = \frac{1}{\xi_{1(i)} - \xi_{0(i)}} \int_{\xi_{0(i)}}^{\xi_{1(i)}} q_i(\xi) d\xi.$$

Die allgemeine Lösung kann man auch in der Form

$$u(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \cdot \Phi_j + \tilde{u}(\xi) \quad \dots \quad (12)$$

schreiben, wo

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi) = & \frac{1 + \frac{h}{2r}}{k} \left\{ \sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)} [1 - \Phi_1(\xi - \xi_{0(i)})] q_{s(i)} - \sum_{i=1}^n F_{\xi_1(i)} [1 - \Phi_1(\xi - \xi_{1(i)})] q_{s(i)} \right\} \\ & + \frac{1 + \frac{h}{2r}}{2k} \left\{ e^{\xi} \left[(\sin \xi - \cos \xi) \left(\sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)} \int_{\xi_0(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^{-t} \cos t dt - \sum_{i=1}^n F_{\xi_1(i)} \int_{\xi_1(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^{-t} \cos t dt \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - (\sin \xi + \cos \xi) \left(\sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)} \int_{\xi_0(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^{-t} \sin t dt - \sum_{i=1}^n F_{\xi_1(i)} \int_{\xi_1(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^{-t} \sin t dt \right) \right] \right. \\ & \left. + e^{-\xi} \left[(\sin \xi + \cos \xi) \left(\sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)} \int_{\xi_0(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^t \cos t dt - \sum_{i=1}^n F_{\xi_1(i)} \int_{\xi_1(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^t \cos t dt \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\sin \xi - \cos \xi) \left(\sum_{i=1}^n F_{\xi_0(i)} \int_{\xi_0(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^t \sin t dt - \sum_{i=1}^n F_{\xi_1(i)} \int_{\xi_1(i)}^{\xi} \bar{q}_i(t) e^t \sin t dt \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi, & \Phi_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \cdot \sin \xi, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi], & \Phi_4 &= \frac{1}{4} [\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi]. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_j bestimmt man aus den Randbedingungen auf den Stirnflächen des Behälters.

Für eine isotrope Schale ($E_r = E_\theta = E_z = E$, $\nu = 0$) ergibt sich dann aus der Gl. (1)

$$\bar{u}(\xi, \eta) = u(z) + \frac{1}{E} \int \sigma_r d\eta \quad \dots \quad (13)$$

und aus der Gl. (2)

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r} [E u(z) + \int \sigma_r d\eta] \quad \dots \quad (14).$$

Ist das Verhältnis $\frac{h}{r}$ im Vergleich zur Eins vernachlässigbar, dann geht die Gl. (11) in die Grundgleichung der dünnwandigen Zylinderschale über.

Diese Lösung hat ihre Berechtigung bei den Schalen von der Länge $l < 2\sqrt{r_2(r_2 - r_1)}$.

Außerdem kann man diese Methode auch auf die Lösung der kurzen dickwandigen Zylinderschale veränderlicher Dicke anwenden.

Anschrift: Dipl. Ing. J. VALENTA, SVÚTT, Praha 1, Husova 8, ČSSR

Eine Integralgleichung für Beulprobleme

Von H. WENZEL

Eine Rechteckplatte sei längs ihres Randes auf einer unnachgiebigen Unterlage frei drehbar gelagert. Sie werde längs ihres Randes durch ein beliebiges Gleichgewichtssystem von Kräften belastet, die in der Plattenmittelebene liegen. Durch diese Beanspruchung als Scheibe ist in der Platte ein ebener Spannungszustand definiert, der durch die Koordinaten σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* des ebenen Spannungstensors beschrieben wird. Die genannten drei Funktionen können etwa mittels der AIRYSchen Spannungsfunktion ermittelt werden. In unserem Zusammenhang sehen wir sie als bekannt an.

Multipliziert man die gegebene Randbelastung mit einem Parameter und läßt man diesen von Null an monoton wachsen bzw. fallen, so kann es vorkommen, daß es bei diesem Prozeß einen ersten Parameterwert gibt, bei dem die Platte auszubeulen beginnt. Zur mathematischen Formulierung dieses Sachverhaltes greifen wir einen Plattenrandpunkt heraus, an dem ein vom Nullvektor verschiedener Spannungsvektor \mathfrak{P} angreift. Ist e ein Einheitsvektor, der gleich- oder auch entgegengesetzt gerichtet zu \mathfrak{P} ist, so gilt $\mathfrak{P} = p e$. Wir identifizieren die Plattenmittelebene mit dem Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ in einem kartesischen x, y -System, bezeichnen mit

$w(x, y)$ die Durchbiegung der Plattenmittelebene senkrecht zur x, y -Ebene, benutzen die von den elastischen und geometrischen Eigenschaften der Platte abhängende Konstante

$$\sigma_e = \frac{E \pi^2}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \quad (E: \text{Elastizitätsmodul, } \nu: \text{Querkontraktionszahl, } h: \text{Plattenstärke}),$$

setzen $k = \frac{p}{\sigma_e}$, führen die Definitionsformeln $\sigma_x = \frac{1}{p} \sigma_x^*$, $\sigma_y = \frac{1}{p} \sigma_y^*$, $\tau_{xy} = \frac{1}{p} \tau_{xy}^*$ ein und erhalten die Beuldifferentialgleichung

$$\Delta \Delta w(x, y) = k \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left[\sigma_x(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + 2 \tau_{xy}(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + \sigma_y(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right] \dots (1)$$

sowie die Randbedingungen

$$w = 0, \quad \Delta w = 0 \quad \text{längs Rechteckrand} \dots (2).$$

Durch (1) und (2) ist eine Eigenwertaufgabe definiert. Der kleinste positive bzw. größte negative Eigenwert k charakterisiert den Beginn des Ausbeulens.

Die eckige Klammer der rechten Seite von (1) wird abkürzend mit $X(x, y)$ bezeichnet. Sehen wir vorübergehend $X(x, y)$ als bekannt an, so kann (1) unter Beachtung von (2) mittels der GREENSchen Funktion $G(u, v; x, y)$ (Einflußfunktion für die Durchbiegung) nach w aufgelöst werden:

$$w(u, v) = k \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \iint G(u, v; x, y) X(x, y) dx dy \dots (3).$$

(3) ist eine Integrodifferentialgleichung für w . Um zu einer Integralgleichung zu kommen, stellen wir uns auf der linken Seite von (3) durch ganze rationale Rechenoperationen und durch Differentiationsprozesse $X(u, v)$ her. Rechts führen diese Operationen $G(u, v; x, y)$ in eine Funktion $K(u, v; x, y)$ über. $K(u, v; x, y)$ enthält neben $\sigma_x(u, v)$, $\sigma_y(u, v)$, $\tau_{xy}(u, v)$ die Einflußfunktionen für die Biege- und Torsionsmomente. Aus der bekannten klassischen Singularität der GREENSchen Funktion berechnet man die Singularität für K . Ebenso wie G läßt sich K in einen bekannten singulären Summanden und einen zunächst unbekannten regulären Summanden zerlegen. Dessen Bestimmung kann mittels der GOURSATSchen Formel auf die Bestimmung zweier holomorpher Funktionen, die von $z = x + i y$ abhängen, zurückgeführt werden. Bezüglich $A = u + i v$ liegt i. a. keine Holomorphie vor. A wird als Parameter mitgenommen.

Die Randbedingungen von G haben Randbedingungen von K und damit Randbedingungen für die gesuchten holomorphen Funktionen zur Folge. Bei den hier vorliegenden Randbedingungen (2) zeigt es sich, daß die Randbedingungen für die eine der beiden gesuchten holomorphen Funktionen angegeben werden können, ohne hierbei Randwerte der anderen gesuchten holomorphen Funktion heranziehen zu müssen.

Zur expliziten Angabe der holomorphen Funktionen überträgt man sie zunächst mittels konformer Abbildung in das Innere des Einheitskreises, benutzt dort die POISSONSche Integralformel, transformiert das Integral ins Rechteck zurück und wertet das entstehende Integral über den Rechteckrand mittels des Residuensatzes und mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen aus. Es zeigt sich, daß die Quadratur in geschlossener Form durchführbar ist. Neben elementaren Funktionen treten nur die WEIERSTRASSSche \wp -, ζ - und σ -Funktion auf. Nach Bestimmung der beiden holomorphen Funktionen ist der reguläre Summand von K und damit K selbst bekannt. Es ergibt sich die Integralgleichung

$$X(u, v) = k \iint K(u, v; x, y) X(x, y) dx dy \dots (4)$$

mit $\eta = \zeta(a)$, $\eta' = \zeta(i b)$ und

$$\begin{aligned} K(u, v; x, y) = & \frac{1}{4 b^2} [\sigma_x(u, v) + \sigma_y(u, v)] \ln \left| \frac{\sigma(z - A) \sigma(z + A)}{\sigma(z - \bar{A}) \sigma(z + \bar{A})} \right| \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{8 b^2} [\sigma_x(u, v) - \sigma_y(u, v) + 2 i \tau_{xy}(u, v)] \right. \\ & \times \left(\zeta(z - A) [\pi(\bar{z} - \bar{A}) + 2(\eta b - a i \eta')(z - A) - 4 a b(\zeta(z) - \zeta(A))] \right. \\ & + \zeta(z + A) [\pi(\bar{z} + \bar{A}) + 2(\eta b - a i \eta')(z + A) - 4 a b(\zeta(z) + \zeta(A))] \\ & - \zeta(\bar{z} - A) [\pi(z - \bar{A}) + 2(\eta b - a i \eta')(\bar{z} - A) - 4 a b(\zeta(\bar{z}) - \zeta(A))] \\ & \left. \left. - \zeta(\bar{z} + A) [\pi(z + \bar{A}) + 2(\eta b - a i \eta')(\bar{z} + A) - 4 a b(\zeta(\bar{z}) + \zeta(A))] \right] \right\} \\ & + \frac{2}{b^2} \tau_{xy}(u, v) [a b i (\zeta^2(z) - \wp(z)) - \eta \eta' z^2]. \end{aligned}$$

Infolge der guten Konvergenz der Thetareihen ist der Kern auch numerisch erfaßbar.

Es ist damit ein neuer exakter Ausgangspunkt zur Beulwertbestimmung geschaffen. Neben den bekannten Methoden kann man also bei der vorliegenden Problemklasse jetzt auch die Theorie und Praxis der Integralgleichungen heranziehen.

In die Problemklasse fällt ein von CHWALLA 1954 genanntes bisher ungelöstes Stegblechbeulproblem. Es handelt sich hierbei um eine frei drehbar gelagerte Rechteckplatte (man denke etwa an ein Seitenverhältnis von 1:10), die längs des einen langen Randes eine in der Plattenmittelebene liegende konstante Belastung p senkrecht zum Rand trägt, am gegenüberliegenden Rand lastfrei ist, und an den übrigen beiden Rändern durch parabolisch verteilte Schubkräfte gehalten wird. In diesem Beispiel gilt mit unseren Bezeichnungen nach MESNAGER:

$$\begin{aligned}\sigma_x(u, v) &= 2 \left[\left(\frac{u}{a} - \frac{1}{2} \right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{u}{a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right], \\ \sigma_y(u, v) &= 2 \left(\frac{u}{a} - \frac{1}{2} \right) \left[3 \frac{v}{a} \left(\frac{v}{a} - \frac{b}{a} \right) - 2 \frac{u}{a} \left(\frac{u}{a} - 1 \right) - \frac{1}{5} \right], \\ \tau_{xy}(u, v) &= 6 \left(\frac{v}{a} - \frac{b}{2a} \right) \frac{u}{a} \left(\frac{u}{a} - 1 \right)\end{aligned}$$

mit $a < b$.

Anschrift: Dr. HORST WENZEL, Dresden N 30, Leipziger Str. 304

Die Analyse einiger Rheoeffekte bei der Beanspruchung von Stoffen

VON JERZY ZAWADZKI*)

Die schnelle Entwicklung der Technik erfordert die Analyse und Lösung vieler Probleme, die für die moderne konstruktive Praxis besonders wichtig sind, der Beanspruchung von Metallen und Kunststoffen unter der (vom Autor „anisotonisch“ genannten) Belastung bei verschiedenen Zustandsparametern. Der Autor hatte auf die Analyse der Rheoeffekte der Beanspruchung acht gegeben, d. h. auf den Einfluß der Zeitdauer, der Geschwindigkeit und Folge der Superposition der einzelnen Belastungen. Die Arbeit besteht aus einer theoretischen Bearbeitung und aus einem experimentellen Teil.

Die theoretische Bearbeitung gründet sich vor allem auf einer Analyse der thermodynamischen Zustandsänderungen, die innerhalb des Körpers während seiner Deformation und Beanspruchung unter Belastung stattfinden. Sie betreffen vor allem die von dem Autor für die Beanspruchung angenommene Hypothese der spezifischen freien Energie. Seine Betrachtung wollte der Autor auch auf Festkörper einer beliebigen inneren Struktur verallgemeinern, sowohl einer „geordneten“ kristallinen, wie auch einer amorphen. Deswegen hat er im Versuchsteil mit seinem Mitarbeiter (Ob. Ass. Mgr.-Ing. ZDZISŁAW GABRYSZEWSKI) einige Stoffe von verschiedener innerer Struktur untersucht. Im Vortrag wurden die Ergebnisse der experimentellen Arbeit bei einigen gewählten Charakteristiken der anisotonischen Belastungen für zwei Stoffe gezeigt: Messing und Polyvinylchlorid PVC hart. Nach Abschluß des Referats wurde die Forschung an anderen Stoffen weitergeführt, denn diese Arbeit ist nur eine Etappe in den theoretischen Betrachtungen und experimentellen Arbeiten, die auf längere Sicht geplant sind. Die Analyse des Einflusses so vieler Faktoren auf die Beanspruchung und Deformation von Stoffen kann nicht im Rahmen eines kurzen Referats abgeschlossen werden.

Besonders wichtig ist, wie wir schon betonten, die theoretische Analyse und Forschung an und außerhalb der Plastizitätsgrenze; wichtig für die Berücksichtigung des Konsolidationseffektes (im allgemeinen Sinn) und für die gegenseitige Abhängigkeit mit Folge der Superposition der anisotonischen Belastungen und ihres gemeinsamen Einflusses auf die Belastungsgrenze des Stoffes.

In den theoretischen Betrachtungen untersuchte der Autor den Einfluß der anisotonischen Belastungen auf die Zeitänderung der Komponenten des Deformationstensors:

$$\varepsilon_i(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=1}^6 J_{ik} \dot{\sigma}_k + v_{pi} + \alpha_i \dot{T} \right] d\tau \dots \dots \dots (I).$$

* Technische Hochschule Wrocław, Polen.

Der Autor hatte den Begriff des Koeffizienten der Anisotonie der Beanspruchung eingeführt:

$$\omega_{ik}(\tau, t) = \frac{\sigma_k(\tau)}{\sigma_i(t)} \quad \dots \quad (II)$$

und vor allem das erste Glied der Gleichung I betrachtet; z. B.

$$\varepsilon_{ik}(t) = \sigma_i(t) \int_0^t J_{ik}(\tau) \dot{\omega}_{ki}(\tau, t) d\tau \quad \dots \quad (III).$$

Durch experimentelle Beobachtung können wir feststellen, daß die Suszeptibilität J_{ik} von der Deformations- und Beanspruchungsgeschichte, wie auch von der Temperatur abhängig ist:

$$J_{ik} = J_{ik}[\psi_k(\tau, t), T] \quad \dots \quad (IV).$$

Die Funktion $\psi_k(\tau, t)$ (von dem Autor „Koeffizient der relativen Anisotonie der Beanspruchung“ genannt) bestimmte man nach entsprechenden Betrachtungen bei Anwendung der schon erwähnten Hypothese der spezifischen freien Energie [1]:

$$\delta F = \delta \Phi - S \delta T - T \delta S \equiv \delta F_1 \quad \dots \quad (V).$$

In den theoretischen Betrachtungen und in der experimentalen Tätigkeit untersuchte der Autor mit seinem Mitarbeiter vor allem die „Verschiebung“ und die „Deformation“ der Plastizitätsbedingung in Abhängigkeit von der Geschichte der anisotonischen Belastung [2].

Die Versuche machte man an dünnwandigen Rohrprobestäben beim Anlegen eines flachen Spannungszustands mit den Komponenten σ_θ und σ_z . Es wurde die Belastung mittels der Längskraft und des inneren Druckes angewendet. Mit Hilfe besonderer Hilfsgeräte machte man die Spannungen σ_θ und σ_z unabhängig für das Erhalten von einigen (schon erwähnten) Charakteristiken der anisotonischen Belastungen. Für die Dehnungsmessung wurden selbst-angefertigte Dehnungsmesser gebraucht, die eine Messung bei einer gleichzeitigen Torsion des Probestabes ermöglichen. Die Ergebnisse der Versuche stellte man graphisch dar und nachher analysierte und bearbeitete man die Folgerung und verglich sie mit den theoretischen Betrachtungen.

Literatur

- [1] J. ZAWADZKI, Ciśnienie zredukowane jako jeden z parametrów wyężenia, Rozpr. Inż. PAN. LXXIII 1957.
- [2] J. ZAWADZKI, Beitrag zur Theorie der anisotonischen Belastung der Polymeren, ZAMM, GAMM-Tagungs-Sonderheft Freiberg 1960, S. T 117—T 118.

Anschrift: Doz. Dr.-Ing. JERZY ZAWADZKI, Wrocław, Plac Grunwaldzki 17 m. 36, Wieżowiec, Polen

Zum heutigen Stand des Wissens um die Beanspruchungen von Eisenbahnradern

Von WOLFGANG ZOTTMANN*)

Seit der Geburtsstunde der Eisenbahn im Jahre 1825 ist trotz der erstaunlichen Fortschritte der Eisenbahntechnik ein wichtiges Teil aller Schienenfahrzeuge im wesentlichen unverändert geblieben: das Rad. Um so eigenartiger muß es berühren, wenn festgestellt werden muß, daß der Ingenieur auch heute noch nicht in der Lage ist, für die Berechnung der nun seit fast ein- einhalb Jahrhunderten rollenden Räder eine strenge Lösung anzugeben. Die Gestaltung der heute im Betrieb befindlichen Räder erfolgte daher rein empirisch, indem neue Radkörper ähnlich den im Betrieb bewährten Formen gestaltet und eventuell im Einsatz noch offenbar werdende schwache Stellen so lange verstärkt wurden, bis betriebssichere Räder entstanden waren.

An Versuchen, rechnerische Methoden zur Ermittlung der in den verschiedenen Radformen auftretenden Spannungen zu entwickeln, hat es zweifellos nicht gefehlt. In der einschlägigen Literatur sind jedoch nur sehr wenige Hinweise gegeben, die zudem nur ungenaue Anhaltspunkte vermitteln. Die Schwierigkeit bei der Entwicklung eines Berechnungsverfahrens für Eisenbahn- räder liegt dabei nicht so sehr auf der theoretischen Seite, als vielmehr darin, daß bisher keine experimentellen Unterlagen über die Spannungsverteilung in den Radkörpern vorlagen.

*) Bundesbahn-Versuchsanstalt München, Mechanische Abteilung, Abteilungsleiter: BOR Dipl.-Ing. F. HEGENBARTH.

Die heute erhobenen Forderungen nach höheren Geschwindigkeiten auf der einen Seite und nach möglichst weitgehendem Leichtbau auf der anderen Seite sind mit der für den Schienenverkehr erforderlichen Sicherheit für Reisende und Frachten nur dann zu vereinbaren, wenn die an den Fahrzeugteilen wirkenden Kräfte und die durch sie entstehenden Spannungen genügend genau bekannt sind und damit durch geeignete konstruktive Maßnahmen beherrscht werden können. Die Mechanische Abteilung der Bundesbahn-Versuchsanstalt München hat es sich daher zur Aufgabe gemacht, durch Messungen an einer Vielzahl von Radkörpern möglichst umfangreiche grundsätzliche Erkenntnisse über die Beanspruchungen von Eisenbahnradern zu sammeln und diese für Neukonstruktionen zu verwerten.

Der Radsatz eines Schienenfahrzeuges besteht aus einer Achse, auf die zwei Radkörper — Speichen- oder Scheibenräder — aufgepreßt sind. In Europa werden fast durchweg zusammengesetzte Räder verwendet, bei welchen auf den eigentlichen Radkörper ein Radreifen aufgeschumpft ist. Die Gesamtbeanspruchung dieser Räder wird somit durch Belastungen hervorgerufen, die sich in zwei Gruppen zusammenfassen lassen. Die erste Gruppe bilden die ständigen Beanspruchungen der beim Fertigungsprozeß entstehenden Eigenspannungen¹⁾, der beim Einpressen der Achse in die Radnabe und der beim Aufschumpfen des Radreifens hervorgerufenen Spannungen. Diese ergeben zusammen eine statische Spannungsverteilung, die allein von der Formgebung und den Abmessungen der einzelnen Radsatzteile abhängt. Der zweiten Gruppe gehören die zeitweise im Fahrbetrieb wirkenden Achslasten, Seitenkräfte und Beschleunigungskräfte²⁾ an, die nur in sehr geringem Maße durch die Gestaltung des Radsatzes beeinflusst werden können, aber dessen dynamische Beanspruchung ergeben.

Wie zahlreiche Versuche gezeigt haben, sind die beim Einpressen der Achse in die Radnabe entstehenden Spannungen höchstens in der Nähe der Nabe von Bedeutung, sie können jedoch gegenüber den durch das Aufschumpfen des Radreifens bedingten Spannungen vernachlässigt werden. In Bild 1 sind zwei verschiedene Ausführungsformen einer doppeltgewellten Radscheibe wiedergegeben. Der Vergleich der beiden Kurvenbilder zeigt, daß die Spannungsverteilung durch einfache konstruktive Maßnahmen beeinflusst und die statischen Spannungsmaxima abgebaut werden können. Wie Bild 2 zu entnehmen ist, kann die gleiche konstruktive Maßnahme, die eine Minderung der statischen Spannungshöchstwerte bewirkt, eine Erhöhung der dynamischen Spannungen zur Folge haben. Da im wesentlichen die dynamischen Beanspruchungen die Haltbarkeit eines Konstruktionsteils beeinflussen, unterstreicht dieses Beispiel die Bedeutung der Kenntnis der am Radsatz angreifenden dynamischen Kräfte.

Die während der Fahrt an einem Radsatz wirkenden Kräfte wurden bisher entweder durch Messung der Achslagerkräfte oder durch Bestimmung der an den Schienen auftretenden Reaktionskräfte ermittelt. Beide Verfahren ergeben jedoch nur Näherungswerte, von welchen mit einer mehr oder weniger großen Unsicherheit auf die in Wirklichkeit herrschenden Kräfte geschlossen werden muß. Die Mechanische Abteilung der Bundesbahn-Versuchsanstalt München hat mit der in den Bildern 1 und 2 unten gezeigten doppeltgewellten Radscheibe ein mit Dehnungsmeßstreifen versehenes Rad zur Ermittlung der während der Fahrt wirkenden dynamischen Kräfte herangezogen³⁾. Grundlage der Messungen war die Überlegung, daß die während einer Radumdrehung auftretenden Dehnungen eines Radkörperpunktes i sowohl von der Höhe der Radlast Q und derjenigen der Seitenkraft Y wie auch vom Winkel φ , den der Radialschnitt durch den Punkt i mit dem Radialschnitt durch den Lastangriffspunkt bildet, abhängen. Mathematisch läßt sich dieser Zusammenhang durch die Beziehung

$$\varepsilon_i = a_i(\varphi_i) Q + b_i(\varphi_i) Y \quad \dots \dots \dots (1)$$

ausdrücken. Im folgenden entsprechen die vom Winkel φ abhängigen periodischen Funktionen $a_i(\varphi_i)$ der Dehnung des Punktes i bei 1 Mp Radlast und $b_i(\varphi_i)$ der Dehnung bei 1 Mp Seitenkraft.

Um die beiden Unbekannten Q und Y bestimmen zu können, müssen während der Fahrt die Dehnungen an zwei Punkten I und II gemessen werden. Auf Grund der in Bild 2 wieder-

¹⁾ Die Hersteller bemühen sich, die beim Fertigungsprozeß entstehenden Eigenspannungen durch eine geeignete Wärmebehandlung des fertiggeformten Radkörpers möglichst zu beseitigen. Messungen mit dem Röntgenfeinstruktur-Verfahren haben gezeigt, daß die Eigenspannungen bei den meisten heute gebräuchlichen Radkörperformen kleiner als die augenblicklich erreichbare Genauigkeit des Verfahrens von $\pm 3 \text{ kp/mm}^2$ gehalten werden können. (Nach einem internen Bericht des Bochumer Vereins für Gußstahl.) Daher werden im folgenden die Eigenspannungen als vernachlässigbar klein nicht weiter erörtert.

²⁾ In den folgenden Betrachtungen sind die Wirkungen der Beschleunigungskräfte den Achslasten und den Seitenkräften zugeschlagen.

³⁾ Während der Vorbereitung der Versuchsfahrten erschien eine Arbeit von OLSON und JOHNSON [4], die auf ähnliche Weise Seitenkräfte ermittelten; auf die Bestimmung der Radlasten wurde dabei bewußt verzichtet. Zur Zeit werden im Rahmen des ORE der UIC ähnliche Versuche an einem Speichenrad durchgeführt.

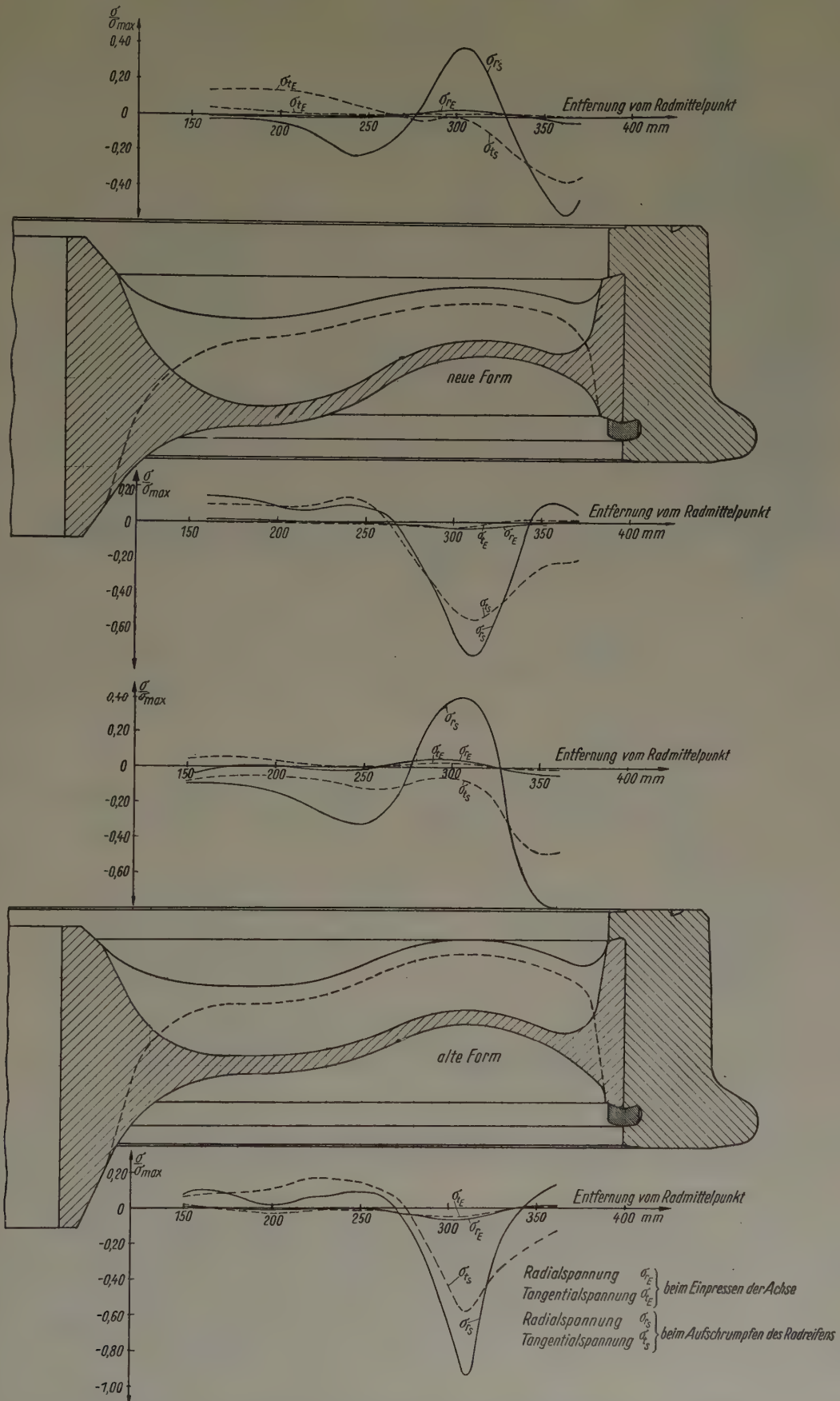


Bild 1. Durch das Einpressen der Achse in die Radnabe und das Aufschrupfen des Radreifens auf eine doppelgewellte Leichttradscheibe bedingte Spannungsverteilung

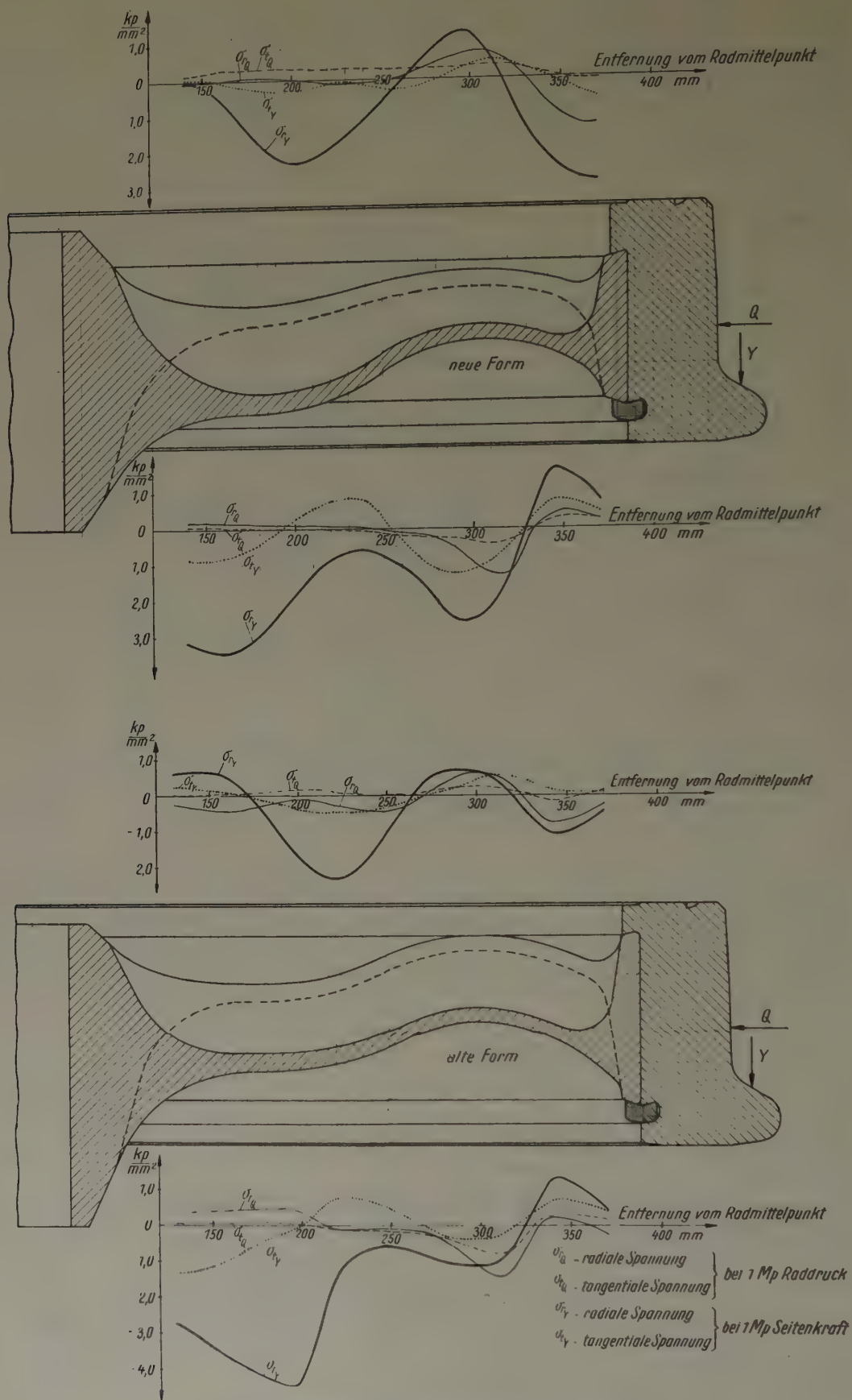


Bild 2. Spannungsverteilung bei 1 Mp Radlast bzw. Seitenkraft

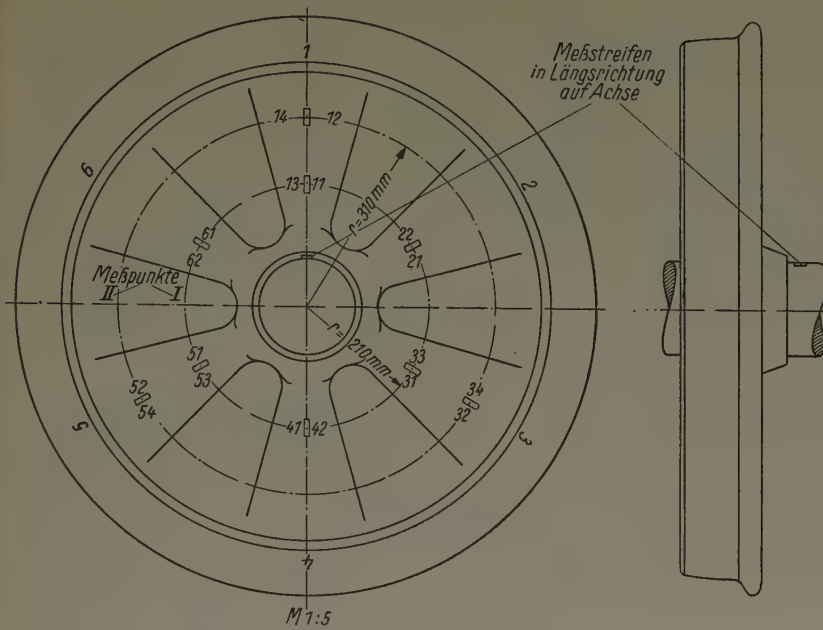


Bild 3. Anordnung der Dehnungsmeßstreifen zur Bestimmung der Radlasten Q und Seitenkräfte Y während der Fahrt



Bild 4. Statischer Räderprüfstand der Mechanischen Abteilung der Bundesbahn-Versuchsanstalt München

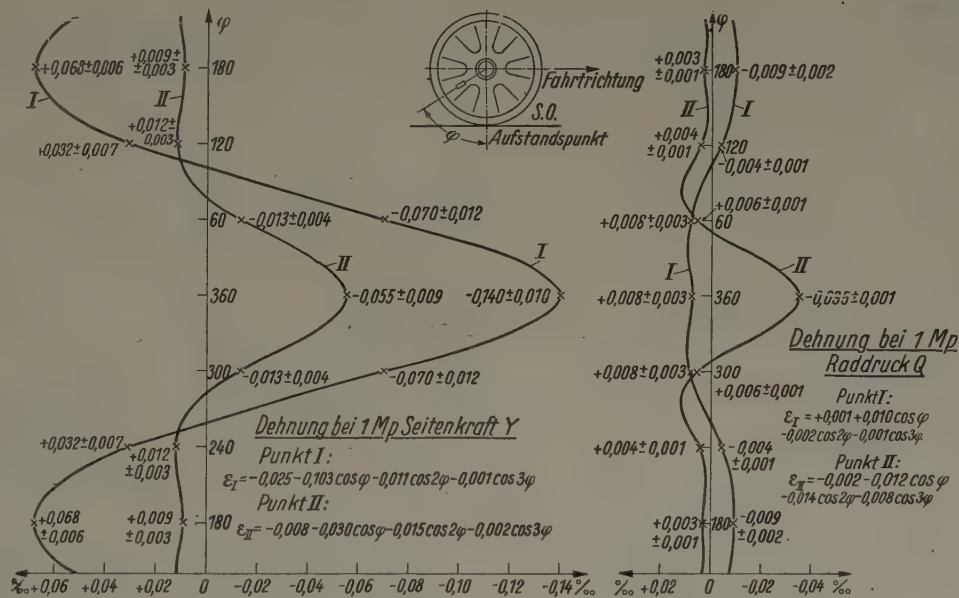


Bild 5. Eichung der Dehnungsmeßstreifen an den Punkten I und II

gegebenen Meßergebnisse wurden die in Bild 3 dargestellten Meßstreifenanordnungen gewählt. Mit den während der Fahrt gemessenen Dehnungen ε_I und ε_{II} folgen die Radlasten Q und Seitenkräfte Y aus der Beziehung (1) zu

$$Q = C_1 \varepsilon_I + C_2 \varepsilon_{II} \dots (2), \quad Y = C_3 \varepsilon_I + C_4 \varepsilon_{II} \dots (3),$$

wobei die Konstanten C die Funktionen $a_I(\varphi_I)$, $a_{II}(\varphi_{II})$, $b_I(\varphi_I)$ und $b_{II}(\varphi_{II})$ enthalten. Diese 4 Funktionen wurden durch Eichung der Dehnungsstreifen auf dem in Bild 4 wiedergegebenen statischen Räderprüfstand⁴⁾ der Mechanischen Abteilung ermittelt. Wie sich bei der Eichung ergab, hängen die Dehnungen bei den einzelnen Belastungen nach der Reihenentwicklung

$$\varepsilon = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi \dots (4)$$

vom Winkel ab (Bild 5).

⁴⁾ Von der MAN nach Angaben von Herrn Dr. H. DEUTLER, DB-Versuchsanstalt München, Mechanische Abteilung, gebaut.

Die Versuchsfahrten wurden auf zwei entsprechend ausgewählten Meßstrecken durchgeführt, wobei auf der einen der Einfluß der Geschwindigkeit und auf der anderen derjenige des Gleisbogenhalbmessers untersucht wurde⁵⁾. Bild 6 gibt die Auswertung einer Fahrt mit 90 km/h Geschwindigkeit durch eine Kurve mit 680 m Halbmesser wieder. Wie daraus entnommen werden kann, pendeln Radlast und Seitenkraft während des Kurvenlaufes um den Wert des statischen Bogenlaufes, wobei sich die Radlast auch bei nur geringfügig schwankender Seitenkraft sehr stark ändern kann; dies ist auf das Wanken des Wagenkastens zurückzuführen.

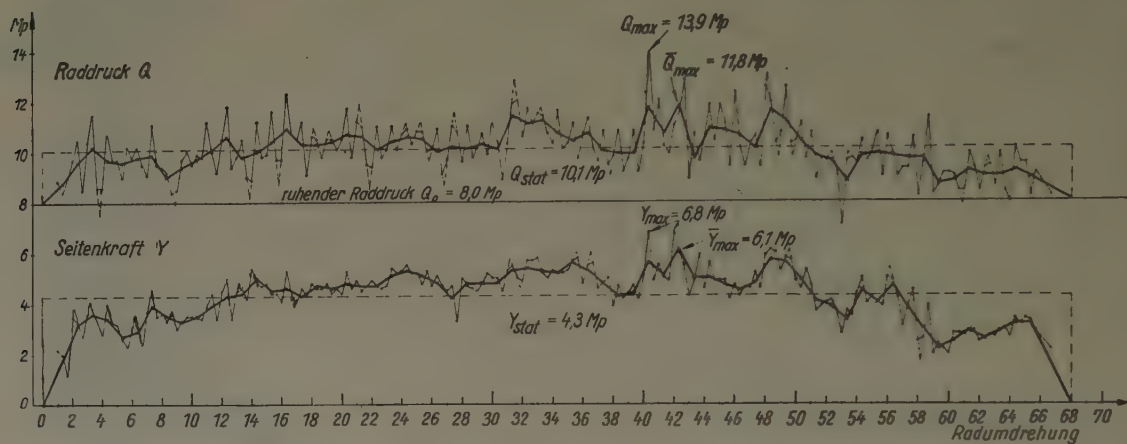


Bild 6. Radlasten Q und Seitenkräfte Y bei einer Fahrt mit 90 km/h Geschwindigkeit in einer Kurve mit 680 m Halbmesser

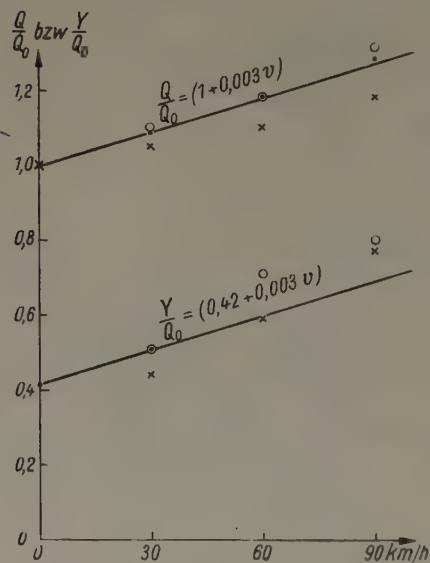


Bild 7. Abhängigkeit der Radlast Q und der Seitenkraft Y von der Geschwindigkeit beim Gleisbogenhalbmesser $R = 680$ m

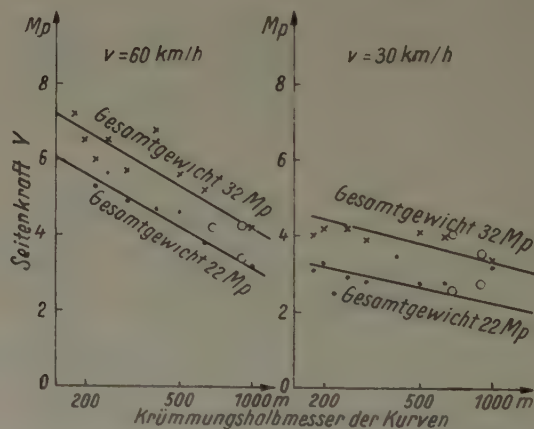


Bild 8. Abhängigkeit der Seitenkraft Y vom Gleisbogenhalbmesser. Die eingezeichneten Werte sind die Mittelwerte aller bei gleichem Kurvenhalbmesser, gleicher Geschwindigkeit und gleicher Belastung gemessenen höchsten Seitenkräfte

Die Ergebnisse der Meßfahrten zur Ermittlung des Geschwindigkeitseinflusses finden in Bild 7 ihren Ausdruck. Aus den Werten wurden für die Radlast Q die Beziehung

$$Q = (1,0 + 0,003 V) Q_0 \quad \dots \quad (5),$$

und für die Seitenkraft

$$Y = (0,42 + 0,003 V) Q_0 \quad \dots \quad (6)$$

abgeleitet, die jedoch nur für den Kurvenhalbmesser $R = 680$ m gelten. Der Einfluß des Gleisbogenhalbmessers kann Bild 8 entnommen werden. Zusammen mit den Beziehungen (5) und

⁵⁾ Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen und Meßergebnisse wird in der Arbeit [5] gegeben.

(6) ergeben sich für die Berechnung der zu erwartenden höchsten Radlasten und Seitenkräfte aus den gesamten Meßergebnissen die Näherungsformeln⁶⁾

$$Q = [(0,025 - 0,008 \lg R) V + 1,0] Q_0 \quad \dots \dots \dots (7),$$

$$Y = [(0,025 + 0,008 \lg R) V \mp 0,42] Q_0 \quad \dots \dots \dots (8).$$

Die Kräfte Q und Y ergeben sich jeweils in Mp, wenn die Geschwindigkeit V in km/h, der Halbmesser R in m und die ruhende Radlast Q_0 in Mp eingesetzt werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß es sich bei den angegebenen Formeln um Folgerungen aus Messungen mit einem bestimmten Schienenfahrzeug handelt, die in der vorliegenden Form mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht für alle Fahrzeugarten gelten.

Literatur

- [1] H. DEUTLER, Spannungsmessungen an einer Leichtradscheibe für einen 20-t-Radsatz, Technische Mitteilungen Krupp 15 (1957) S. 59/67.
- [2] W. ZOTTMANN, Untersuchungen über den Spannungszustand eines Eisenbahnrades, ETR-Archiv für Eisenbahntechnik, Folge 9 Juni 1957.
- [3] W. PRIGGE, Die Beanspruchung einer einfach gewellten Eisenbahnradscheibe, Glasers Annalen 83 (1959), S. 69—73 u. 132—136.
- [4] P. E. OLSON und S. JOHNSON, Seitenkräfte zwischen Rad und Schiene, Glasers Annalen 83 (1959), S. 153—161.
- [5] W. ZOTTMANN, Messung der während der Fahrt auf ein Eisenbahnrad wirkenden Kräfte, Glasers Annalen 85 (1961), S. 115—123.

Anschrift: Dr.-Ing. WOLFGANG ZOTTMANN, Herrsching/Ammersee, Keramische Straße 9a

⁶⁾ Nach der Theorie ist eine Beziehung zu erwarten, in welche die Fahrgeschwindigkeit V mit ihrem Quadrat eingeht. Aus Zeitmangel konnte bei den Versuchsfahrten nur bei drei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen werden. Die damit vorliegenden drei Meßpunkte erschienen dem Verfasser wegen der unvermeidlichen Streuung der Meßergebnisse nicht ausreichend, eine Beziehung mit dem Geschwindigkeitsquadrat abzuleiten, zumal der Einfluß der Kurvenüberhöhung sicher eine wesentliche Rolle spielt.

D. STRÖMUNGSMECHANIK

Das Verhalten der ähnlichen Grenzschichten mit Rückströmung bei gestörtem Profil^{*)}

Von MARTIN FIEBIG

Den von K. STEWARTSON [1] betrachteten ähnlichen Lösungen der zweidimensionalen laminaren Grenzschichtgleichungen, die ein Gebiet mit Rückströmung aufweisen, werden an einer Stelle $x = x_0$ Störungen überlagert.

Das Verhalten dieser stromab der Störstelle nicht mehr ähnlichen Grenzschichten wird untersucht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Störungen 1. klein gegenüber der Grundströmung sind, 2. die Potentialströmung nicht beeinflussen und 3. die Haftbedingung an der Körperoberfläche erfüllen, siehe Bild 1.

Die ähnlichen Grenzschichten an einer festen Wand von K. STEWARTSON sind dadurch gekennzeichnet, daß die Wandschubspannung negativ ist und daher in Wandnähe die Strömungsrichtung der Grenzschicht der Potentialströmung entgegengesetzt verläuft. Bei diesen Grenzschichten herrscht immer Druckanstieg; das Rückströmgebiet ist dabei um so größer, je geringer der Druckanstieg. Die beiden Grenzfälle bilden die ähnliche Ablösungsgrenzschicht mit verschwindender Wandschubspannung ohne Rückströmung und die Grenzschicht ohne Druckanstieg mit unendlich großem Rückströmgebiet. STEWARTSON deutet diese ähnlichen Grenzschichten im Zusammenhang mit der Ablösung, die im Unterschall mit einer Verminderung des Druckanstieges gekoppelt ist.

In [2] konnte gezeigt werden, daß Störungen der HARTREE- oder FALKNER-SKAN-Profile, die die drei oben erwähnten Bedingungen erfüllen, sowohl bei Druckabfall als auch bei Druckanstieg stromab der Störstelle gedämpft werden. Dabei ist die minimale Dämpfung bei Druckabfall stärker als bei Druckanstieg. In

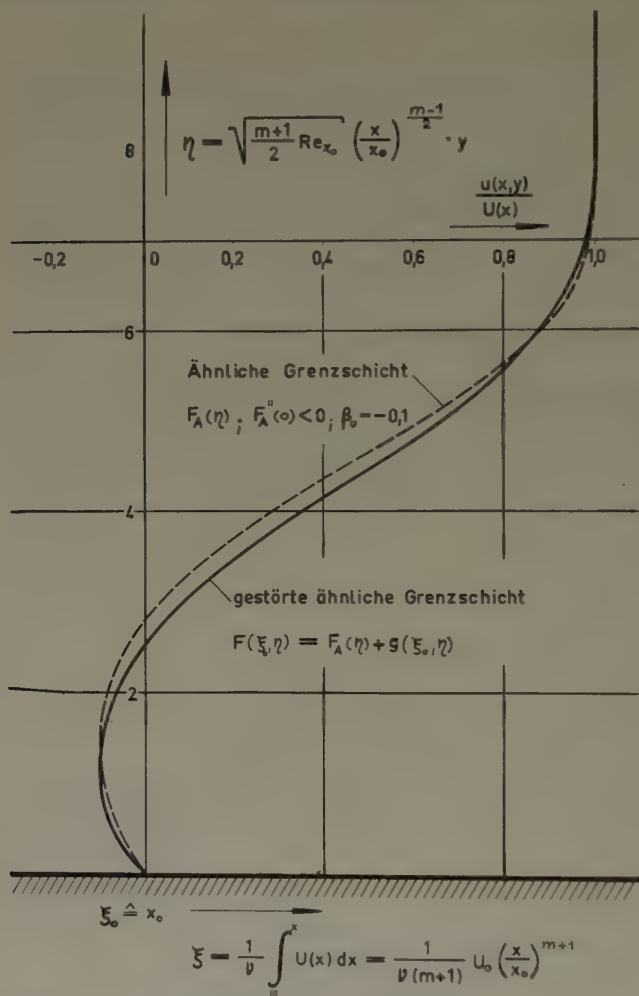


Bild 1. — — — Ähnliche Grenzschicht mit Rückströmung
— — — gestörte ähnliche Grenzschicht mit Rückströmung bei $\xi_0 \hat{=} x_0$

dieser Arbeit wird untersucht, ob auch noch die ähnlichen Grenzschichten mit Rückströmung gegenüber kleinen stationären Störungen stabil sind.

Ausgehend von den PRANDTLschen Grenzschichtgleichungen [3] werden diese durch Einführung einer modifizierten Stromfunktion $F(\xi, \eta)$ und Transformation der unabhängigen Veränderlichen in die von GÖRTLER [4] benutzte Differentialgleichung überführt. Durch den Ansatz für die modifizierte Stromfunktion

$$F(\xi, \eta) = F_A(\eta) + g(\xi, \eta) \quad \dots \dots \dots (1),$$

mit

$$\xi = \frac{1}{v} \int_0^x U(x) dx; \quad \eta = \frac{U(x) y}{\left\{ 2 v \int_0^x U(x) dx \right\}^{1/2}},$$

^{*)} Aus dem Institut für theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen.

wobei $F_A(\eta)$ die Stromfunktion der ähnlichen Grenzschichten mit Rückströmung und $g(\xi, \eta)$ die Störstromfunktion bedeutet, folgt nach Linearisierung in bezug auf die Störung $g(\xi, \eta)$, die Differentialgleichung¹⁾ für $\xi \geq \xi_0$:

$$g_{\eta\eta\eta} = + F_A g_{\eta\eta} - 2 \beta_0 F'_A g_\eta + F''_A g = 2 \xi [F'_A g_{\xi\eta} - F''_A g_\xi] \quad \dots (2a),$$

mit den Randbedingungen:

$$g(\xi, 0) = g_\eta(\xi, 0) = g_\eta(\xi, \infty) = 0; \quad g(\xi, \infty) = M, \quad M < \infty \quad \dots (2b).$$

Diese Randbedingungen folgen aus den Forderungen, die an die Störungen gestellt wurden.

Macht man für die Störstromfunktionen den Ansatz:

$$g(\xi, \eta) = \sum_k \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\alpha_k} c_{\alpha_k} g_{\alpha_k}(\eta) \quad \dots (3a),$$

bei einem diskreten Spektrum von α_k -Werten und:

$$g(\xi, \eta) = \int_{\alpha} \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\alpha} c(\alpha) g(\alpha, \eta) r(\alpha) d\alpha \quad \dots (3b),$$

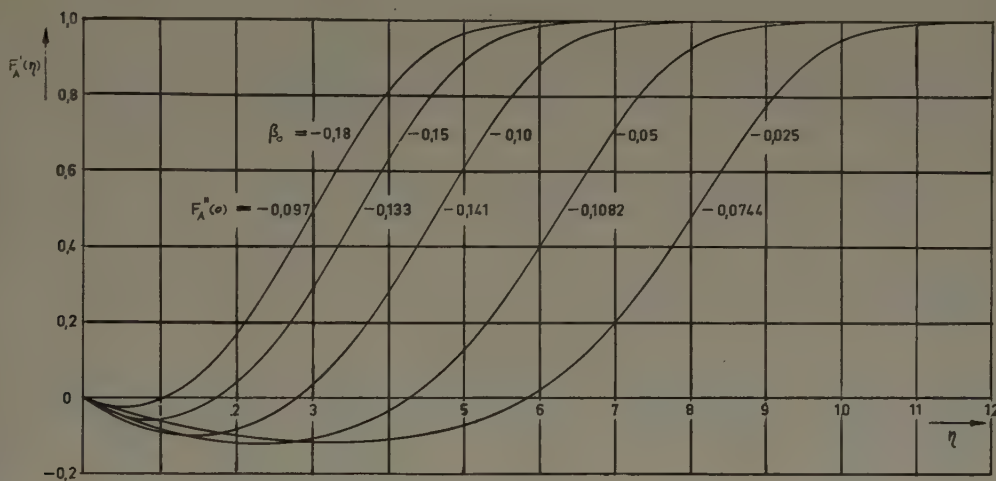


Bild 2. Ähnliche Grenzschichten mit Rückströmung $U(x) = U_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^m$; $m = \frac{\beta_0}{2 - \beta_0}$

bei einem kontinuierlichen Spektrum von α -Werten, so erhält man nach Einsetzen in (2a) die nun gewöhnliche Differentialgleichung,

$$g'''_{\alpha_k} + F_A g''_{\alpha_k} - 2 \beta_0 F'_A g'_{\alpha_k} + F'_A g_{\alpha_k} = 2 \alpha_k (F'_A g'_{\alpha_k} - F''_A g_{\alpha_k}) \quad \dots (4a),$$

mit den Randbedingungen:

$$g_{\alpha_k}(0) = g'_{\alpha_k}(0) = g'_{\alpha_k}(\infty) = 0; \quad g_{\alpha_k}(\infty) \leq N, \quad N < \infty \quad \dots (4b).$$

Die Differentialgleichung (4a) mit den Randbedingungen (4b) ist ein lineares Eigenwertproblem dritter Ordnung mit den Eigenfunktionen $g_{\alpha_k}(\eta)$ und Eigenwerten α_k . Die Koeffizientenfunktion $F_A(\eta)$ und ihre Ableitungen sind die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$F'''_A + F_A F''_A + \beta_0 (1 - F'^2_A) = 0 \quad \dots (5a),$$

mit den Randbedingungen:

$$F_A(0) = F'_A(0) = 0; \quad F'_A(\infty) = 1 \quad \dots (5b),$$

die von STEWARTSON [1] für den Fall negativer Wandschubspannung,

$$F''_A(0) < 0; \quad 0 > \beta_0 > -0,199,$$

behandelt wurde, Bild 2.

Aufgrund analytischer Betrachtungen ergibt sich der größte Eigenwert zu

$$\alpha_k < -\left(\beta_0 + \frac{1}{2} \right) \quad \dots (6).$$

Damit klingen alle Störungen der ähnlichen Grenzschichten mit Rückströmung stromab der Störstelle $x_0 \triangleq \xi_0$ ab. Je stärker der Druckanstieg ist, um so geringer ist die minimale Dämpfung.

¹⁾ Diese Differentialgleichung wurde von Herrn Prof. Dr. K. OSWATITSCH abgeleitet.

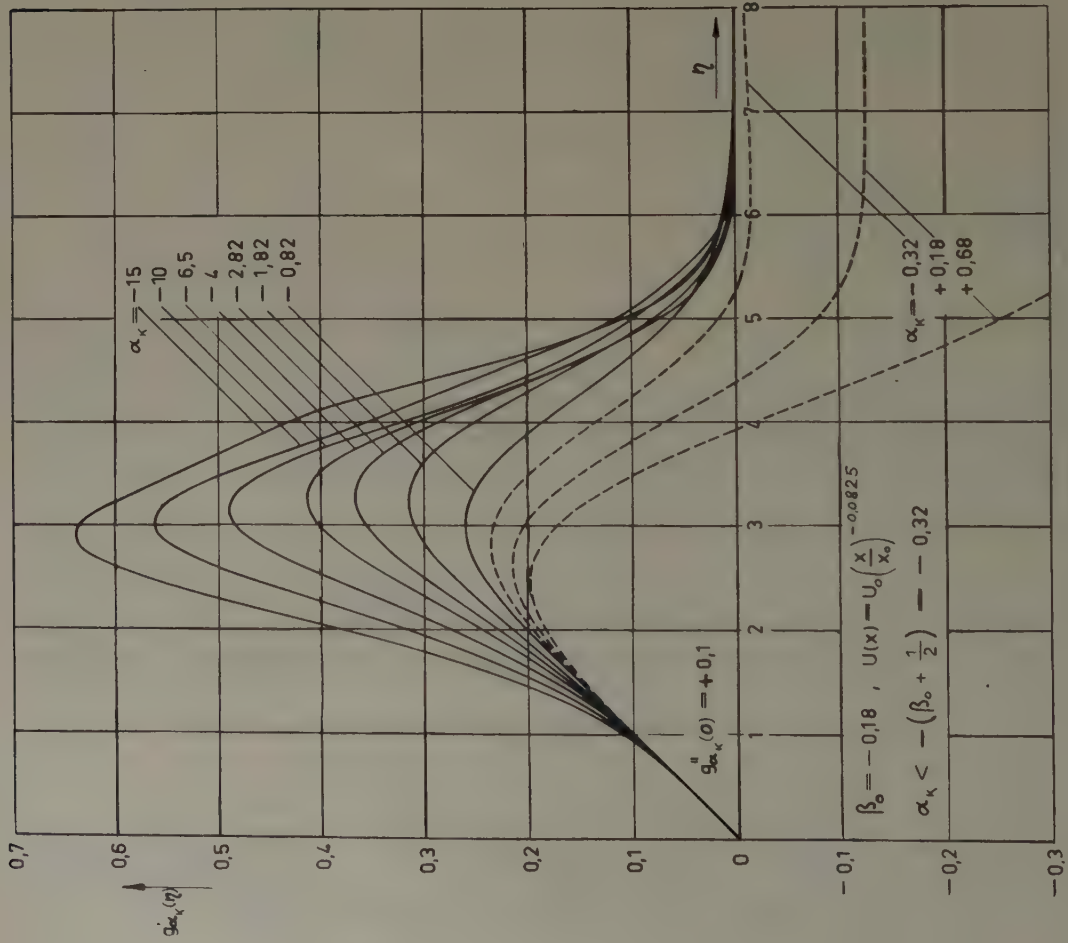


Bild 3

Eigenfunktionen der gestörten ähnlichen Grenzschicht mit Rlekströmung: — — — Lösungen der Differentialgleichung der Eigenwertprobleme, die die Randbedingung $\lim_{\eta \rightarrow \infty} g_{\alpha_K}(\eta) \leq N$; $N < \infty$ nicht erfüllen

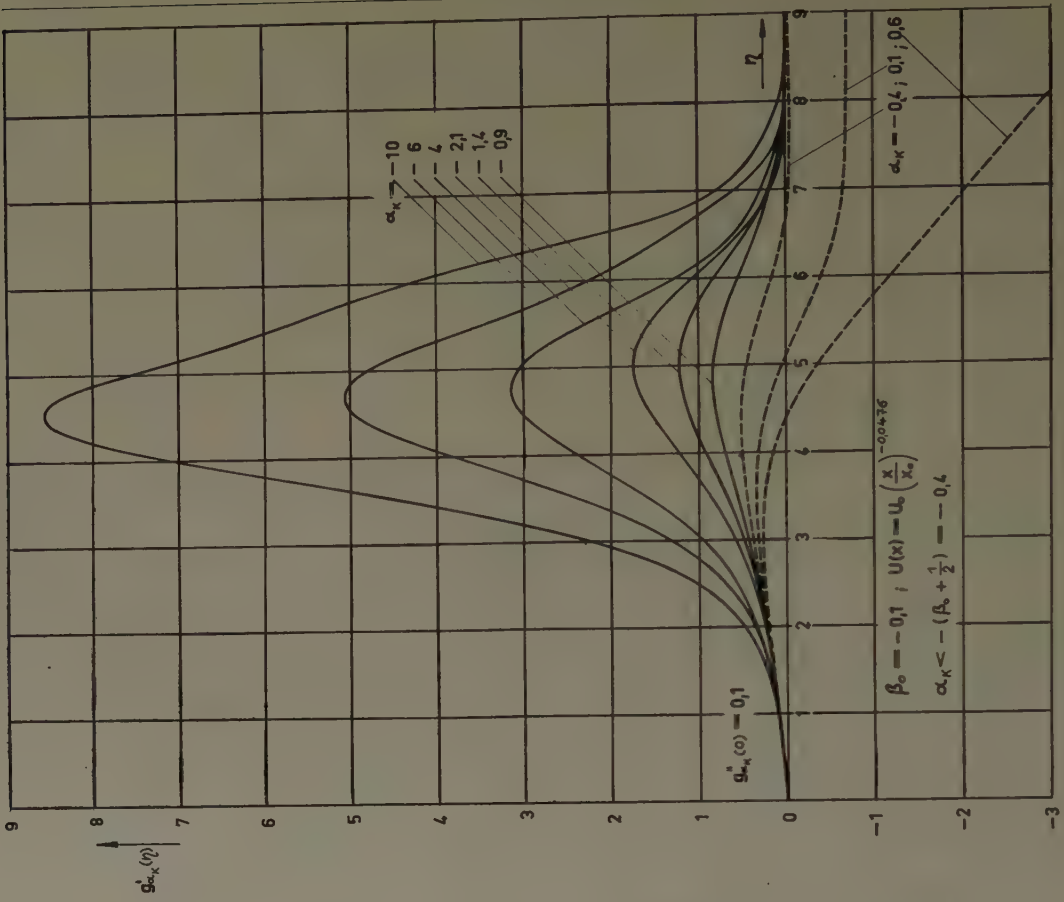


Bild 4

Die minimale Dämpfung in ξ -Richtung ist proportional zu $\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{-\left(\beta_0 + \frac{1}{2}\right)}$, was einer Dämpfung in x -Richtung proportional zu $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\left(\beta_0 + \frac{1}{2}\right)(m+1)}$ entspricht, mit $m = \beta_0/(2 - \beta_0)$.

Damit ist die minimale Dämpfung bei Druckanstiegen nahe dem der ähnlichen Ablösungsgrenzschicht ungefähr proportional $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{x_0}}}$, während sie bei verschwindendem Druckanstieg proportional zu $\frac{1}{\sqrt[2]{\frac{x}{x_0}}}$ wird.

Die numerische Lösung des Eigenwertproblems (4) zeigt, daß ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten mit einem kleinsten Eigenwert vorhanden ist. Einige Eigenfunktionen sind in Bild 3 und 4 für zwei ähnliche Grenzschichten mit Rückströmung angegeben. Eine ausführliche Arbeit erscheint demnächst in der Zeitschrift für Flugwissenschaften.

Literatur

- [1] K. STEWARTSON, Further Solutions of the Falkner-Skan-Equation, Proc. Cambr. Phil. Soc. **50** (1954), p. 454—465.
- [2] M. FIEBIG, Weiterentwicklung und Verhalten der stationären laminaren gestörten ähnlichen Grenzschichten (Erscheint demnächst als DVL-Bericht).
- [3] L. PRANDTL, Über Flüssigkeiten mit sehr kleiner Reibung, Verh. d. III. Int. Math.-Kongresses, Heidelberg 1904, S. 489—494.
- [4] H. GÖRTLER, A new Series of steady laminar boundary layer flows, J. Math. Mech. **6** (1957), S. 1—67.

Anschrift: Dipl.-Ing. M. FIEBIG, Institut für theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen, Theaterstr. 13

Verhalten einer instationären Stoßwelle in einem Rohr

Von TH. GINSBURG*)

Trifft in einem homogenen Gas eine kugelsymmetrische Stoßwelle K (Bild 1), welche durch eine punktförmige Explosion in Z entstanden ist, auf eine ebene Platte auf, so wird sie reflektiert (R). Befindet sich in der Platte eine Öffnung und daran anschließend ein Rohr von konstantem Querschnitt, so wird sich in dem Rohr nach der komplizierten Einlaufströmung eine Stoßfront S ausbilden, deren Verhalten schon nach kurzer Zeit durch eine eindimensionale, instationäre Strömung beschrieben werden kann. Aus Bild 1 ist ersichtlich, daß zwischen den in entgegengesetzten Richtungen laufenden Stoßwellen R und S ein Unterdruckgebiet entstehen muß, welches Verdünnungswellen auslöst, die den beiden Stoßfronten nacheilen und diese abbauen.

Das im folgenden behandelte Problem stellt nur einen Ausschnitt aus dem Gesamtproblem dar, welches in vier Teilprobleme aufgliedert werden kann:

1. Ausbreitung einer radialen Stoßwelle nach einer punktförmigen Explosion in einem homogenen Medium.
2. Reflexion einer Stoßwelle an einer ebenen Wand (mit Nachlauf).
3. Einlaufströmung in das Rohr bis zur Ausbildung einer eindimensionalen Strömung.
4. Instationäre eindimensionale Strömung hinter einer Stoßwelle, wobei hauptsächlich der Abbau der Stoßfront durch die nachfolgenden Verdünnungswellen interessiert.

Das erste Problem darf durch die ausführlichen Arbeiten von H. L. BRODE [1, 2, 3] als vollständig gelöst betrachtet werden. Für die Reflexion von kugelförmigen Stoßwellen an einer ebenen

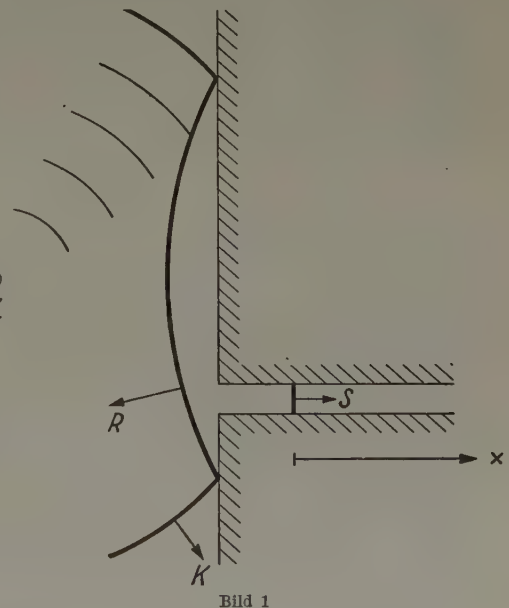


Bild 1

*) Institut für angewandte Mathematik der E. T. H. Zürich.

Platte können wohl Näherungslösungen für die Spitzenwerte an den Stoßfronten angegeben werden, wenn die Druckverhältnisse bei der einfallenden Stoßwelle bekannt sind [4]; hingegen ist keine brauchbare Methode bekannt, welche den Nachlauf der reflektierten Welle zu bestimmen erlaubt, da es sich dabei — wie auch bei der Einlaufströmung in das Rohr — im allgemeinen um eine instationäre, dreidimensionale Strömung handelt.

Wir beschränken uns im folgenden auf das vierte Teilproblem, nämlich auf die Bestimmung der zeitlichen Druck-, Temperatur- und Dichteverhältnisse hinter der Stoßfront in einem Rohr mit konstantem Querschnitt, wenn an der Stelle $x = 0$ die notwendigen Anfangsbedingungen vorgegeben sind. Dabei werden allfällig auftretende Effekte der Wärmeleitung und der Reibung vollständig vernachlässigt. Weiter wird das Medium als polytropes Gas mit konstantem γ angenommen. Hingegen ist die Strömung wegen der durch die Stoßfront auftretenden Entropieverluste anisotrop.

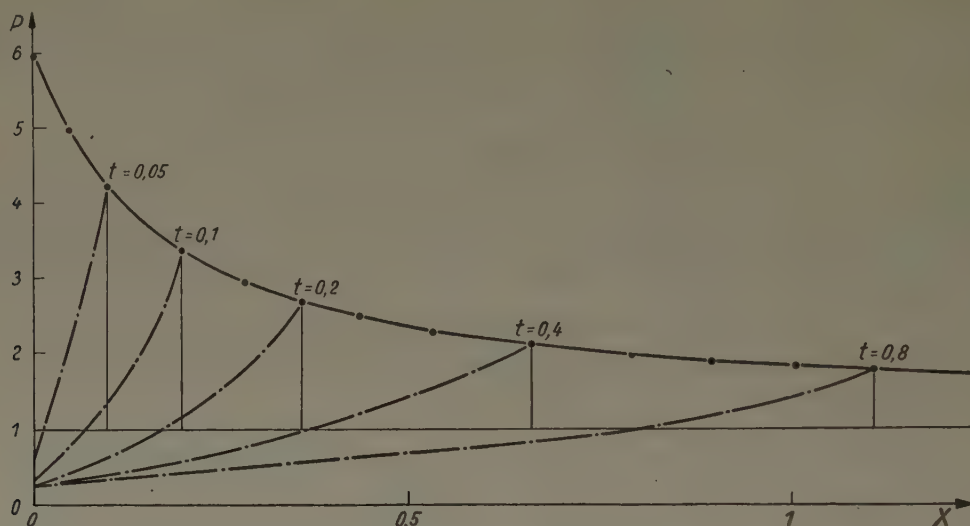


Bild 2. Druckverlauf $p(x)$ zu verschiedenen Zeiten. $p_s = 6$, $\alpha_1 = 45$, $\alpha_2 = 45$, $\alpha_3 = 35$

Behalten wir das Gesamtproblem im Auge (Bild 1), so erhalten wir einen Hinweis auf die Wahl der Anfangsbedingungen. Der Nachlauf einer kugelsymmetrischen Stoßwelle zeigt einen sehr starken, in erster Näherung exponentiellen Abfall der Druck-, Dichte- und Geschwindigkeitswerte hinter der Stoßfront [2]. Diese Verhältnisse werden durch die Reflexion an der Platte und die Einlaufströmung ins Rohr wohl modifiziert, doch wird sich für den prinzipiellen Verlauf des Nachlaufs nichts ändern. Wir geben daher die Anfangsbedingungen an der Stelle $x = 0$:

$$p = p_s e^{-\alpha_1 t}; \quad \rho = \rho_s e^{-\alpha_2 t}; \quad u = u_s e^{-\alpha_3 t}.$$

Ist das ungestörte Medium vor dem Stoß charakterisiert durch den Druck p_0 , die Dichte ρ_0 und Ruheschallgeschwindigkeit c_0 , so ist wegen der Beziehungen von RANKINE-HUGONIOT das Dichteverhältnis ρ_s/ρ_0 wie auch die Teilchengeschwindigkeit u_s eindeutig festgelegt durch das Druckverhältnis p_s/p_0 . Die Anfangsbedingungen können somit durch die vier Parameter $p_s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eindeutig beschrieben werden.

Die Annahme eines polytropen Gases mit konstantem γ ist bei starken Stößen in Luft ($\gamma = 1,4$) in Frage gestellt, zeigt sich doch aus Messungen, daß schon bei $p_s/p_0 = 10$ der Wert von γ auf 1,36 und bei $p_s/p_0 = 100$ auf 1,30 absinkt. Dies rührt davon her, daß bei den hohen Temperaturen, welche hinter der Stoßfront auftreten, Dissoziations- und Ionisationsvorgänge einsetzen, welche die Zusammensetzung der Luft ändern. Wie OSWATTSCH [5] ausführt, kann die Luft dabei wohl noch als ideales Gas angesehen werden, jedoch mit einem kleineren Molgewicht m entsprechend der durch die Ionisation und Dissoziation gesteigerten Teilchenzahl im Gas, was sich in einer Verkleinerung von γ bemerkbar macht. Frühere Untersuchungen von BECKER und BURKHARDT wurden weitgehend bestätigt durch neuere Arbeiten von F. R. GILMORE [6], der für die HUGONIOT-Beziehungen bei starken Stößen in Luft γ durch das „effektive Verhältnis der spezifischen Wärmen γ' “ ersetzt, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\gamma' = 1 + \frac{p}{\rho \cdot E}.$$

Dabei bedeutet E die innere Energie des Gases hinter der Stoßfront.

Für schwache Stöße wird $\gamma = \gamma'$. Für starke Stöße ergibt die Theorie von GILMORE in erster Näherung einen Dichtesprung durch die Stoßwelle

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \frac{\gamma' + 1}{\gamma' - 1},$$

was genau der Beziehung für starke Stöße in einem polytropen Gas entspricht, nur daß γ durch γ' ersetzt ist.

Auf der elektronischen Rechenmaschine der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich (ERMETH) wurde ein Rechenprogramm hergestellt, welches erlaubt, mit Hilfe eines Charakteristikenverfahrens nach Vorgabe der Anfangsbedingungen durch die Parameter $p_s, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ alle Zustandsgrößen in der x, t -Ebene zu bestimmen, wobei γ als konstant angenommen wird.

Für schwache Stöße ($p_s < 8$) kann mit $\gamma = 1,4$ gerechnet werden. Bild 2 zeigt die Resultate einer Berechnung, wobei als Anfangsparameter die Werte $p_s = 6, \alpha_1 = 45, \alpha_2 = 45, \alpha_3 = 35$ gesetzt wurden. Gegenwärtig sind noch weitere Untersuchungen im Gange, welche bei festgehaltenem $p_s (t = 0)$ den Einfluß der übrigen Anfangsparameter auf den zeitlichen Verlauf des Spitzendrucks $p_s(t)$ abklären sollen.

Um für starke Stoßwellen den Abfall des Spitzendrucks in einem Rohr bestimmen zu können, müßte für die Stoßfront das Verhältnis der spezifischen Wärmen gleich γ' gesetzt werden, während man im Nachlauf der Strömung mit einem variablen γ zu rechnen hätte, entsprechend dem Dissoziations- und Ionisationsgrad der Luft. Da jedoch im allgemeinen die Strömungsverhältnisse nur in einem beschränkten Teile des Rohres von Interesse sind, kann dort in erster Näherung $\gamma = \gamma'$ gesetzt werden, sofern in diesem Teilstück die Dichte- und Temperaturwerte nicht allzu stark variieren. Auch für starke Stöße werden am Institut für angew. Mathematik der E.T.H. noch weitere Untersuchungen durchgeführt, welche neben dem Einfluß der Anfangsparameter auch denjenigen der Wahl von γ auf den Stoß und den Nachlauf abklären sollen. Eine ausführliche Publikation über diese mathematischen Experimente soll demnächst erscheinen.

Literatur

- [1] H. L. BRODE, Point Source Explosion in Air, Rand Corporation RM—1824—AEC, Dec. 1956.
- [2] H. L. BRODE, Space Plots of Pressure, Density and Particle Velocity for the Blast Wave from a Point Source in Air, Rand Corporation RM—1913—AEC, June 1957.
- [3] H. L. BRODE, Numerical Solutions of Spherical Blast Waves, J. Appl. Phys. 26 (1955), S. 766—775.
- [4] TH. GINSBURG, Ausbreitung und Reflexion von starken Explosionswellen, Proceedings of the Rome Symposium (28—30 January 1959) on the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with Real Characteristics, S. 145—156.
- [5] K. OSWATITSCH, Gasdynamik, Wien 1952, Springer Verlag, S. 31—33.
- [6] F. R. GILMORE, Equilibrium Composition and Thermodynamic Properties of Air to 24000 °K, Rand Corporation RM—1543, Aug. 1955.

Anschrift: Dr. TH. GINSBURG, Sihlrain 14, Zürich 2/59, Schweiz

Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von rotierenden Kreisgittern mit Berücksichtigung der Kompressibilität

Von J. GRUBER

Es ist bekannt, daß bei der Konstruktion von Laufrädern der Pumpen und der Ventilatoren radialer Bauart sich das sogenannte Singularitätenverfahren gut bewährt hat. Die Anwendung dieses Verfahrens ist im Falle von Rädern, deren unendlich dünne Schaufeln rückwärts gekrümmt sind, besonders einfach [1], [2], [3].

Diese Methode kann nach einer gewissen Erweiterung auch zur Berechnung der Beschau felung von Turbokompressor-Laufrädern verwendet werden, falls die Schaufeln als unendlich dünn zu betrachten sind. Das Medium wird reibungsfrei, die Absolutströmung drehungsfrei angenommen.

Die Beschau felung soll zwischen zwei beliebigen Rotationsflächen liegen. Das Laufrad wird durch Stromflächen — die man als Rotationsflächen betrachten kann — in so viele Teilräder aufgeteilt, daß die Änderung der Strömung senkrecht zu den Rotationsflächen in allen Teilrädern als vernachlässigbar klein zu betrachten ist. Die Breite jedes Teilrades ist im allgemeinen veränderlich. So wird die Konstruktion der Beschau felung auf die Berechnung von mehreren Teilrädern zurückgeführt. Der Grundgedanke der Berechnungsmethode ist der folgende:

Die mittlere Stromfläche des Teilrades wird in bekannter Weise auf eine x - y -Ebene abgebildet, wobei die $y = \text{const}$ -Linien den Meridianlinien bzw. die $x = \text{const}$ -Linien den Breitenkreisen entsprechen.

Die Kontinuitätsgleichung für die Relativströmung auf der mittleren Rotationsfläche erscheint für die x - y -Ebene in der Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta \Phi = -w_e \operatorname{grad} \left(\ln \frac{b}{b_2} \frac{\varrho}{\varrho_0} \right) \dots \dots \dots (1).$$

Darin bedeutet: Φ das Geschwindigkeitspotential der Absolutströmung, b/b_2 das Breitenverhältnis des Teilrades bezogen auf die Breite am Radumfang, ϱ/ϱ_0 die relative Dichte des Mediums bezogen auf die Dichte im Ruhezustand vor dem Laufrad. Es besteht ferner

$$\bar{w}_e = \bar{c}_e - \bar{u}_e,$$

wo

$$\bar{c}_e = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{j},$$

$$\bar{u}_e = \frac{r}{r_2} u \bar{j};$$

u bedeutet die Umfangsgeschwindigkeit des betrachteten Punktes der mittleren Stromfläche des Teilrades; r/r_2 die Entfernung des betrachteten Punktes von der Drehachse bezogen auf den Außenradius des Laufrades.

Ferner gelten noch die folgenden Beziehungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c_m \frac{r}{r_2}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_\theta \frac{r}{r_2}.$$

Es bedeutet c_m die Meridiankomponente, c_θ die Tangentialkomponente der Absolutgeschwindigkeit.

Gl. (1) kann in folgende Form umgeschrieben werden:

$$\Delta \Phi = -w_e \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{b}{b_2} \frac{\varrho}{\varrho_0} \dots \dots \dots (2);$$

s ist die Bogenlänge entlang der relativen Stromlinie in der x - y -Ebene.

Für das Dichteverhältnis gilt

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left[\left(\frac{u}{a_0} \right)^2 + \left(\frac{w}{a_0} \right)^2 - \frac{2 c_{1u} u_1}{a_0^2} \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa - 1}} \dots \dots \dots (3).$$

Es bedeutet κ das Verhältnis der spez. Wärmen, a_0 die Schallgeschwindigkeit im Ruhezustand vor dem Laufrad, w die Relativgeschwindigkeit im Laufrad, c_{1u} die Umfangskomponente der Absolutströmung, u_1 die Umfangsgeschwindigkeit (die letzten zwei Größen vor der Beschauelung).

Die Strömung kann nach Gl. (2) als eine mit Quellen und Senken behaftete inkompressible ebene Strömung betrachtet werden.

Angenommen, daß das Bild der Beschauelung und die Geschwindigkeitsverteilung an der Schaufeloberfläche für die inkompressible Strömung bekannt sind, dann kann man näherungsweise $\Delta \Phi$ mit Hilfe von Gl. (2) und (3) an beiden Seiten des Schaufelbildes bestimmen. Erweitert man noch die inkompressible Lösung durch eine mittlere relative Stromlinie, so kann $\Delta \Phi$ auch in der Nähe der „Kanalmittte“ bestimmt werden. Aus diesen $\Delta \Phi$ -Werten kann die $\Delta \Phi$ -Verteilung bei jedem x mit einem Parabelbogen angenähert werden.

Der unendliche, über die Schaufelbilder laufende zur y -Achse parallele Flächenstreifen wird mit einer, der $\Delta \Phi$ -Verteilung entsprechenden Quellenverteilung belegt. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld dieser Quellenverteilung verändert das Bild der Schaufellinie und jenes der mittleren Stromlinie, demzufolge auch die Geschwindigkeitsverteilung auf diesen. Die somit erhaltene erste Näherungslösung dient als Ausgang zur Berechnung einer zweiten Näherung.

Bei der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten wird die Quellenbelegung in zur y -Achse parallele (Breite dx) Streifen aufgeteilt. Jeder Streifen wird in drei Teile zerlegt; diese sind: a) der Mittelwert q_0 der $\Delta \Phi$ -Verteilung; b) eine sägezahnartige Verteilung (die mit der Teilung der Schaufelbilder t periodisch ist, und bei der Schaufellinie je einen Sprung von $2 q_t$ hat); c) eine periodische parabelartige Verteilung, (die so verschoben ist, daß der Mittelwert 0 ist, das heißt die größte Quellenstärke ist $q_p/3$, die größte Senkenstärke $2 q_p/3$).

Die Bestimmung der induzierten Geschwindigkeit der Teilbelegung a) bietet keine Schwierigkeiten.

Die durch die Teilbelegungen b) und c) induzierten Geschwindigkeitskomponenten sind ein für allemal zu berechnen, sie können in Diagrammen dargestellt werden.

Die induzierte Geschwindigkeit kann man durch numerische (oder graphische) Integration bestimmen.

Das Verfahren ist stark konvergent, im allgemeinen reicht die zweite Näherung aus.

Literatur

- [1] J. GRUBER, Die Konstruktion von Schaufelsternen mit rückwärts gekrümmter Beschaukelung, *Periodica Polytechnica (Maschinen und Bauwesen)* 1 (1957), S. 43—49.
- [2] W. ALBRING und F. SCHLENDER, Die Entwicklung eines Radiallüfters mit hohem Wirkungsgrad, *Maschinenbautechnik* 1959, S. 560—565.
- [3] M. HOFFMEISTER, Entwicklung von radialen Laufschaufeln unter Benutzung des Singularitätenverfahrens, *Maschinenbautechnik* 1959, S. 77—83.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. J. GRUBER, Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität Budapest, Ungarn

Der Entwurf aerodynamisch günstiger Gleichdruckgitterprofile nach dem Hodographenverfahren unter Verwendung der Elektroanalogie

Von M. HACKESCHMIDT*)

Der Entwurf von Gitterprofilen läßt sich in solchen Fällen durch eine Integration vornehmen, bei denen der Geschwindigkeitshodograph bekannt ist [1], [2]. Seine Form muß bei praktisch herstellbaren Gitterprofilen so beschaffen sein, daß die Staupunkte des Potentialfeldes im Innern seiner Kontur im Koordinatenursprung liegen. Das Hauptproblem beim Entwurf eines Hodographen besteht darin, unter teilweiser Vorgabe seines Randes Parameter zu finden, die zumindest die Profilvorderkanten-Staupunktsbedingung erfüllen.

Verhältnismäßig einfach und schnell gelingt die Lösung dieses Problems, wenn das Potentialfeld in der Hodographenebene unter Verwendung der Elektroanalogie bestimmt wird. Sie dient dabei zur Aufmessung zirkulationsfreier Potentialwerte. Ein bekanntes Umrechnungsverfahren [3] liefert die Potentialwerte der zirkulationsbehafteten Strömung auf dem Hodographenrand.

Darauf aufbauend läßt sich ein Entwurfsverfahren für aerodynamisch günstige Profilgitter entwickeln, insbesondere für Gleichdruckgitter mit einer über weite Strecken der Oberfläche konstanten Geschwindigkeit.

Der Hodograph derartiger Profile besitzt zwei konzentrische Kreisbogenstücke, die Strecken \overline{AF} und \overline{LM} (Bild 1). Das durch sie begrenzte Potentialfeld, das Hauptfeld, verändert sich praktisch nicht bei mäßiger Formänderung der restlichen Begrenzungsstücke \overline{LA} und \overline{FM} , denn diese Gebiete mit den veränderlichen Geschwindigkeiten w ($\bar{w} = |w| e^{i\varphi}$) sind in der Profilebene relativ klein und besitzen (ausgenommen die Strecke $\overline{FG'}$) in der Hodographenebene sehr geringe Potentialgradienten. Es genügt folglich in erster Näherung für die Erfüllung der Staupunktsbedingung an der Profilnase ein nach Bild 2 idealisierter Hodograph mit den zwei Parametern $\Delta\varphi$ und $|w_D|/|w_s|$.

Für den letzteren gelten nach praktischen Gesichtspunkten die Grenzen

$$\frac{|w_{D\min}|}{|w_s|} \geq \frac{|w_D|}{|w_s|} \geq \frac{|w_1|}{|w_s|}.$$

Er wird am zweckmäßigsten als unabhängige Veränderliche entsprechend den gewünschten Profileigenschaften gewählt (kleiner Anströmwinkelbereich mit geringen Gesamtdruckverlusten oder großer Anströmwinkelbereich mit mäßigen Gesamtdruckverlusten).

$\Delta\varphi$ und $|w_{D\min}|$ lassen sich experimentell mittels der Elektroanalogie leicht finden.

Der Profilhinterkantenpunkt H liegt auf der Strecke \overline{GL} (Bild 2), wenn $\Delta\epsilon \geq \Delta\epsilon_{\text{Grenz}}$ ist, und zwar etwa dort, wo die Hinterkantenstromlinie im Hodographen des Bildes 1a im Abstand $|w| = |w_D|$ verläuft. Die Profilhinterkante kann später nachträglich zwischen G' bzw. F und M so geändert werden, daß der Punkt H in den Koordinatenursprung der \bar{w} -Ebene rückt, ohne daß sich das Potentialfeld im Hodographen — bis auf das entstehende Gebiet GMH (Bild 1) — merklich ändert.

*) FVAS Dresden.

Während für die Profilnase in der Hodographenebene zwischen L und A eine etwa wie in Bild 1 dargestellte durch V verlaufende Randkontur vorgeschrieben werden kann, soll der Hodographenrand zwischen F und G' so verlaufen, daß eine Ablösung der Strömung vom Gitterprofil vermieden wird. Hierzu dient mit $u = |w|/|w_s|$ der Ansatz für die HAGENSCHE Kennzahl

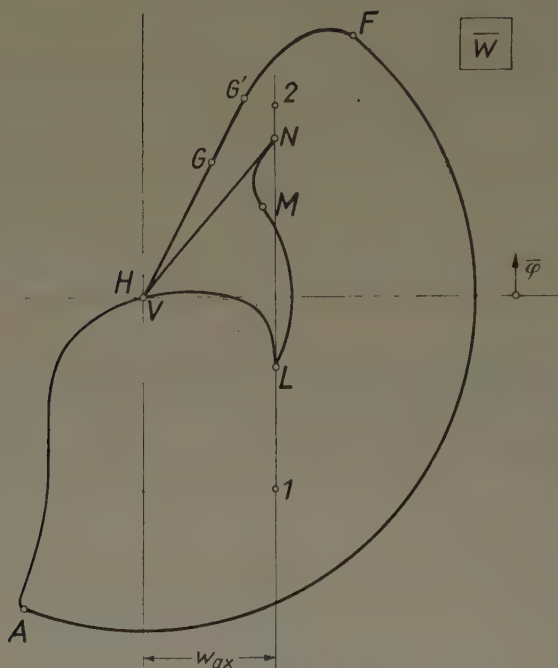


Bild 1a

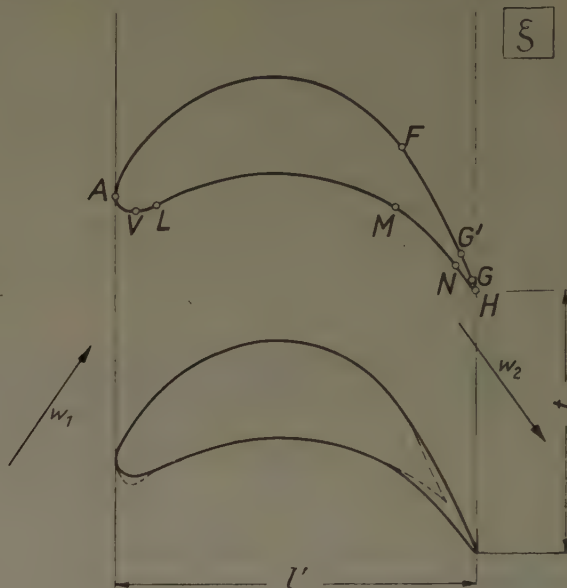


Bild 1b

Zuordnung entsprechender Punkte der Hodographen- und der Profilkontur
(Der gestrichelt eingezeichnete Konturverlauf im unteren Profil entspricht dem Hodographen in Bild 2)

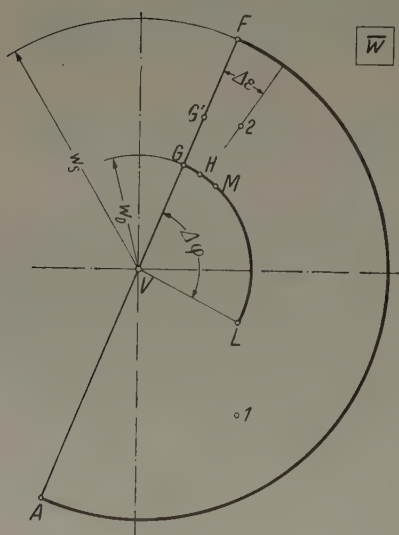


Bild 2. Idealisierter Hodograph

der turbulenten Grenzschicht (siehe z. B. [4])

$$Ha = Ha_{G'} \left(\frac{1 - u^n}{1 - u_{G'}^n} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (n > 0),$$

der mit dem bekannten Integral von BURI eine brauchbare Beziehung für $\Phi = \Phi(u)$ liefert. (Die hierzu benötigte im Punkt F herrschende Impulsverlustdicke δ_F^{**} wird nach bekannten Beziehungen für die Plattengrenzschicht erhalten.) $\Phi(u)$ läßt sich bei geeigneter Wahl von $\Delta\epsilon$ durch sukzessive Approximation in der Hodographenebene verwirklichen.

Nach diesem Verfahren wurde ein Gleichdruckgitter mit einer Umlenkung von $\Delta\beta = 110^\circ$ entworfen. Eine Nachmessung nach [3] bestätigte die vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung.

Dieses Verfahren erfaßt den Kompressibilitätseinfluß bis zur kritischen MACHzahl, wenn der Boden des elektrolytischen Troges nach einer von der Dichte des Mediums abhängigen Funktion modelliert wird. Dieser ist in der \bar{w} -Ebene rotationssymmetrisch entsprechend der nach der MOLENBROEK-Transformation linearisierten Potentialgleichung der kompressiblen Strömung [5].

Literatur

- [1] F. WEINIG, Widerstands- und Tragflügelprofile mit strömungstechnisch günstiger Druckverteilung an der Oberfläche, Zeitschrift für technische Physik 11 (1930).
- [2] F. WEINIG, Der Hodograph der Gitterströmung als Weg zur Ermittlung günstiger Turbinen- und Propellerprofile, 3. Internat. Kongreß für Technische Mechanik, Stockholm 1930.
- [3] M. HACKESCHMIDT, Zur Berechnung der Potentialströmung um beliebige Einzel- und Gitterprofile unter Verwendung der Elektroanalogie, ZAMM 39 (1959), S. 432—433.
- [4] W. ALBRING, Transformation der Impulsgleichung für turbulente Grenzschicht von Rotationskörpern auf ebene Körper, ZAMM 40 (1960), S. 38—40.
- [5] L. MALAVARD, Electrolytic Plotting Tank, Dynamics and Combustion, Princetown 1954.

Anschrift: Dipl.-Ing. MANFRED HACKESCHMIDT, Radebeul 1 bei Dresden, Einsteinstr. 12

Stabilitätsuntersuchungen kompressibler Grenzschichten längs konkaven Wänden

Von GÜNTHER HÄMMERLIN *)

Die Untersuchungen, die hier kurz geschildert werden sollen, befassen sich mit der Wirbelinstabilität, die in Grenzschichten längs konkaven Wänden zuerst von H. GÖRTLER behandelt worden ist. Durch das Zusammenwirken von Zähigkeit und Zentrifugalkraft in solchen Grenzschichtströmungen können Wirbel entstehen, deren Achsen in Strömungsrichtung liegen; falls diese Wirbel angefacht werden, können sie schließlich zum laminar-turbulenten Umschlag führen. Die Fragestellung der Instabilitätstheorie zielt nun darauf hin, die kritischen Parameterwerte der Strömung zu ermitteln, bei denen dieser Fall eintreten kann [1].

Alle bisherigen Arbeiten in dieser Richtung bezogen sich auf inkompressible Strömungen, und die Frage war offen, wie sich verschiedene Wandtemperaturbedingungen unter Berücksichtigung der Kompressibilität eines strömenden Gases auf die Anfälligkeit gegenüber Wirbeln der genannten Art auswirken.

Der Gang der Untersuchungen zur Beantwortung dieser Frage soll hier kurz angegeben werden:

1. Aufstellung der Gleichungen einer instationären, kompressiblen Strömung in koordinatenunabhängiger Form. Das sind die folgenden Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung,

NAVIER-STOKESSche Bewegungsgleichungen,

Energiegleichung,

Zustandsgleichung $p = p(\varrho, T)$,

$\mu = \mu(T)$, $\lambda = \lambda(T)$

(p = Druck, ϱ = Dichte, T = Temperatur, μ = Zähigkeit, λ = Wärmeleitfähigkeit des strömenden Gases).

2. Nach Einführen eines geeigneten Koordinatensystems, dessen Koordinatenlinien mit den Stromlinien der ungestörten Strömung zusammenfallen, werden folgende Vernachlässigungen gemacht:

a) Glieder der Größenordnung δ/R_0 werden gegenüber 1 vernachlässigt (δ = Grenzschichtdicke, R_0 = Radius der angeströmten Wand). Wir beschränken uns damit auf schwach gekrümmte Wände.

b) Die Strömung sei unabhängig von der Wandbogenlänge x .

c) Wir beschränken unsere Betrachtungen auf Strömungen kleiner MACHScher Zahl, bezogen auf die Außenströmung ($Ma < 1$). Außerdem wird mit folgenden speziellen Annahmen gearbeitet:

Die Gültigkeit der Zustandsgleichung idealer Gase wird angenommen.

Die Abhängigkeiten $\mu = \mu(T)$ und $\lambda = \lambda(T)$ werden durch die häufig benutzte Näherung

$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^\omega$ beschrieben. Bei der numerischen Auswertung wird mit $\omega = 0,78$ und mit der PRANDTLschen Zahl $Pr = 0,72$ gearbeitet; diese Werte gelten für Luft.

3. Die gestörte Strömung setzt sich aus dem laminaren Anteil und der überlagerten Wirbelstörung zusammen. So machen wir für die Strömungskomponenten, für Druck-, Temperatur- und Dichteverteilung sowie für Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit Ansätze der Gestalt $f(y) = f_0(y) + f_1(y) \frac{\cos}{\sin} \alpha z e^{\beta t}$, die nach Linearisieren bezüglich der Störamplituden f_1 eine Reduktion auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen ermöglichen.

4. Auf diesem Wege gelangt man schließlich nach einigen Umformungen zu dem folgenden System von Differentialgleichungen (dimensionslos), das die neutralen Störungen beschreibt ($\beta = 0$):

$$\mathfrak{A} u = \frac{U'}{T} v - (U' T^{\omega-1} t)',$$

$$\mathfrak{B} v = -S \sigma^2 e^{-\sigma \eta} \left(\frac{U}{T} u - \frac{1}{2} \frac{U^2}{T^2} t \right),$$

$$\mathfrak{A} t = Pr \left\{ \frac{T'}{T} v - \theta (2 T^\omega U' u' + U'^2 T^{\omega-1} t) \right\} - (T^{\omega-1} T' t)',$$

*) Institut für Angewandte Mathematik der Universität und Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DVL, Freiburg i. Br.

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0) = v'(0) = 0, \\ u(\infty) &= v(\infty) = v'(\infty) = 0, \\ a t(0) + b t'(0) &= 0, \\ t(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

\mathfrak{U} = Linearer Differentialoperator 2. Ordnung, \mathfrak{B} = Linearer Differentialoperator 4. Ordnung, u = Störströmungskomponente in Stromlinienrichtung, v = Störströmungskomponente quer zur Grenzschicht, t = Störtemperatur, U = Grundströmung, T = Grundtemperaturverteilung, $' = \frac{d}{d\eta}$ mit der dimensionslosen Variablen η quer zur Grenzschicht.

Diese Differentialgleichungen stellen unter den angegebenen Randbedingungen ein Eigenwertproblem dar; die auftretenden Parameter haben die Bedeutung

$$S = \left(\frac{u_\infty \delta \rho_\infty}{\mu_\infty} \right)^2 \frac{\delta}{R_0}, \quad \sigma = \alpha \delta \quad \left(\alpha = \frac{2\pi}{d} \cdot \frac{d}{2} = \text{Wirbeldicke} \right),$$

$$\theta = (\kappa - 1) M a^2 \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4.$$

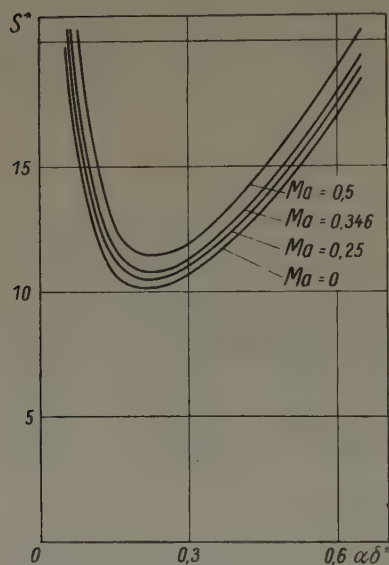


Bild 1. Kritische Kurven bei isolierter Wand für verschiedene MACHsche Zahlen, bezogen auf die Verdrängungsdicke δ^*

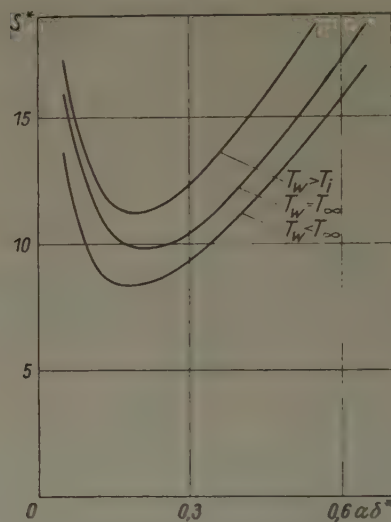


Bild 2. Kritische Kurven bei Heizen und Kühlen der angeströmten Wand ($Ma = 0,5$)

T_w = Wandtemperatur, T_i = Temperatur der isolierten Wand, T_∞ = Temperatur der Außenströmung

Man kann zeigen, daß dieses Gleichungssystem einen einfachen Eigenwert kleinsten Betrages besitzt, der positiv ist. Die Kurve $S(\sigma)$ dieses kleinsten Eigenwerts stellt die kritische Kurve des Stabilitätsproblems dar; ihr Minimum ist der sogenannte „kritische Wert“. Liegt der Parameterwert S (GÖRTLER-Parameter) unter dem kritischen, so wird jede Störung der angesetzten Art gedämpft, liegt er darüber, so kann sie angefacht werden und schließlich die laminare Strömung zum Zusammenbrechen bringen.

5. Für $\theta = 0$ entstehen die Differentialgleichungen des inkompressiblen, temperaturunabhängigen Falls. Da wir uns auf kleine MACHsche Zahlen beschränken wollen, ist es möglich, eine Störungsrechnung durch Entwicklung aller auftretenden Funktionen und des Eigenwerts S nach dem Störparameter θ anzusetzen und so die Lösung des kompressiblen Falls unter verschiedenen Wandtemperaturbedingungen von der einfacheren des inkompressiblen her zu entwickeln. Zur Durchführung dieses Ansatzes werden die auftretenden Differentialgleichungen mit Hilfe GREENscher Funktionen in Integralgleichungen transformiert. Der Eigenwert S , der als Reihe $S = S_0 + \theta S_1 + \theta^2 S_2 + \dots$ erscheint, wird dann in erster Näherung durch $S \cong S_0 + \theta S_1$ dargestellt. Die erste Änderung S_1 läßt sich mit Hilfe einer Integralbedingung bestimmen.

6. Bild 1 zeigt die kritischen Kurven bei isolierter Wand für verschiedene MACHsche Zahlen. Als charakteristische Länge zur Bildung von S^* und von $\alpha \delta^*$ ist die Verdrängungsdicke δ^* einer kompressiblen Grenzschicht gewählt. Mit wachsender MACHscher Zahl rücken die kritischen Kurven nach oben. Der kritische Wert des Parameters S , bezogen auf die Verdrängungsdicke δ^* , erhöht sich mit wachsender MACHscher Zahl.

Bild 2 zeigt den Einfluß von Heizen und Kühlen auf die Lage der kritischen Kurven. Diese liegen um so höher, je wärmer die angeströmte Wand ist. Der kritische Wert von S^* bei erhitzter Wand ist also größer als bei gekühlter.

Eine ausführliche Darstellung dieser Untersuchungen erscheint in Kürze als Bericht Nr. 176 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt.

Literatur

- [1] H. GÖRTLER, Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Fachgruppe I, Neue Folge 2 (1940), S. 1—26.

Anschrift: Dr. GÜNTHER HÄMMERLIN, Freiburg i. Br., Mozartstr. 72

Über den nichtlinearen Energieaustausch innerhalb eines Seegangsspektrums

Von K. HASSELMANN

Die Ausbildung des unregelmäßigen Seegangs auf einem Meer unter der Einwirkung eines Windfeldes wird in der Endphase stark durch nichtlineare Vorgänge beeinflusst. Neben der Vernichtung von Wellenenergie durch Wellenbrechung spielt hierbei der Energieaustausch innerhalb des Seegangsspektrums infolge von nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Wellenkomponenten eine wesentliche Rolle. Die Wechselwirkungen lassen sich mit Hilfe einer von der linearen Näherung ausgehenden Störungsrechnung ermitteln. Wie bereits von PHILLIPS [1] gezeigt wurde, treten nichtlineare Wechselwirkungen mit Energieaustausch zwischen diskreten Wellenzügen erstmals in den Störungsgleichungen 3. Ordnung auf. Im Falle eines kontinuierlichen statistischen Spektrums muß die Störungsrechnung jedoch bis zur fünften Ordnung durchgeführt werden, um sämtliche Terme, die zum Energieaustausch beitragen, mitzuerfassen. Für die Änderung des Seegangsspektrums $F(\xi)^{1)}$ infolge der nichtlinearen Wechselwirkungen ergibt sich dann schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi)}{\partial t} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi') F(\xi'') F(\xi + \xi' - \xi'') T_1(\xi', \xi'', \xi + \xi' - \xi'') dk'_x dk'_y dk''_x dk''_y \\ & - F(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi') F(\xi'') T_2(\xi, \xi', \xi'') dk'_x dk'_y dk''_x dk''_y \dots \dots \dots (1). \end{aligned}$$

Die Austauschfunktionen T_1 , T_2 sind kompliziertere Funktionen, die hier nicht näher angegeben werden können. Sie enthalten als Faktoren DIRACsche δ -Funktionen der Form $\delta(\omega(\xi, \xi', \xi''))$, so daß die vierfachen Integrale in (1) sich in Wirklichkeit auf dreifache Integrale über gewisse Hyperflächen $\omega(\xi, \xi', \xi'') = 0$ im $k'_x k'_y k''_x k''_y$ -Raum reduzieren.

Physikalisch lassen sich die Integrale auf vierfache Wechselwirkungen zurückführen, bei denen unter gewissen Resonanzbedingungen Energie durch eine primäre Wechselwirkung zwischen drei „aktiven“ Wellenkomponenten auf eine vierte „passive“ Wellenkomponente übertragen wird. Die Energieübertragung ist dem Produkt der Energie der drei „aktiven“ Komponenten proportional, von der Energie der „passiven“ Komponente jedoch unabhängig. Der erste, positive Integraalausdruck in (1) ergibt sich dann aus der Summe aller Wechselwirkungen, an denen die Wellenkomponente ξ als die „passive“ Komponente beteiligt ist, während das zweite Integral den Energieverlust darstellt, der sich aus sämtlichen Wechselwirkungen ergibt, in denen die Komponente ξ als eine der „aktiven“ Komponenten auftritt. Da der Energiezuwachs von dem Wert des Spektrums an der Stelle ξ unabhängig, der Energieverlust diesem jedoch proportional ist, haben die nichtlinearen Wechselwirkungen die Tendenz, scharfe Maxima des Spektrums zu glätten und die Energie gleichmäßiger über alle Spektralkomponenten zu verteilen. Es besteht hierin eine weitgehende Analogie zu den nichtlinearen Wechselwirkungen in einem Turbulenzspektrum, welche ebenfalls auf eine isotrope, „weiße“ Spektralverteilung der Turbulenzenergie hinwirken. Im ausgereiften Seegangsspektrum besteht dann wahrscheinlich, ähnlich wie beim

¹⁾ Es ist $F(\xi) dk_x dk_y$ die Energie der Wellenkomponenten des Seegangs, deren Wellenzahlvektoren ξ' im Rechtecksbereich $\xi \leq \xi' \leq \xi + d\xi$ liegen, und die sich in positive ξ -Richtung fortpflanzen.

Kaskadenprozeß der Turbulenz, ein Gleichgewicht zwischen der Energiezufuhr durch Wind-
einwirkung im langwelligen Gebiet des Spektrums, dem nichtlinearen Energietransport vom
energiereichen langwelligen zum energiearmen kurzwelligen Bereich des Spektrums und der vor-
wiegend im kurzwelligen Bereich erfolgenden Energiedissipation durch turbulente Reibung und
Wellenbrechung. Zur genaueren Untersuchung dieser Zusammenhänge sind jedoch zunächst
noch weitere Kenntnisse der anfachenden und dissipativen Terme in der vollständigen Gleichung
für die Energiebilanz des Spektrums [2] erforderlich.

Literatur

- [1] O. M. PHILLIPS, On the Dynamics of Unsteady Gravity Waves of Finite Amplitude, Part 1, The Elementary Interactions, *J. Fluid Mech.* **9** (1960) **2**, p. 193—217.
[2] K. HASSELMANN, Grundgleichungen der Seegangsvoraussage, *Schiffstechnik*, **7** (1960) **39**, S. 191—195.

Anschrift: Dr. K. HASSELMANN, Hamburg 22, Brucknerstr. 25a

Stationäre rotationssymmetrische Strömung eines vollkommen leitenden Plasmas

Von E. HÖLDER

In der Kontinuum-Magneto-Gasdynamik können die stationären rotationssymmetrischen Strömungen eines vollkommen leitenden Plasmas in ähnlichen Schritten wie in der klassischen Gasdynamik behandelt werden: Ausgangspunkt ist das MOLLIERdiagramm (A) für adiabatische Zustandsänderungen. Nachdem das Induktionsgesetz (F) die magnetische Induktion aus Massenstromdichte und Massendichte zu berechnen lehrt, gibt von den EULERSchen Impulsgleichungen die auf das Azimut bezügliche Gleichung (E) längs einer Stromlinie die Konstanz einer Linearkombination aus Drehmoment und azimutaler Komponente der Induktion und damit das Drehmoment als gebrochene lineare Funktion der Dichte. Sodann folgert man aus den beiden anderen Impulsgleichungen zuerst eine durch diese Induktionskomponente ergänzte BERNOULLISCHE Gleichung (B), sodann den Drehungssatz (D), die Erhaltung einer Linearkombination der azimutalen Komponenten von Wirbelstärke und elektrischer Stromdichte; das ist für die der Kontinuität (C) genügende Stromfunktion die gewünschte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Nur im axialsymmetrischen Strömungsfall, wo auch die magnetischen Kraftlinien in den Ebenen durch die Achse verlaufend angenommen werden, scheint nach dem Vorbild des BUSEMANNschen Druckberges ein Druck-Magnetberg mit seinen Doppeltangenten die Sprungeigenschaften am Verdichtungsstoß darzustellen und die Figuratrix für ein Variationsproblem abzugeben. (Erscheint in der ZAMP.)

Anschrift: Prof. Dr. E. HÖLDER, Mainz-Gonsenheim, Heidesheimerstr. 40

Eine Summendarstellung der Singularitätenverteilungen zur Berechnung der Strömung an vorgegebenen Rotationskörpern bei Schräganströmung

Von FRIEDRICH KEUNE*)

Bei der Untersuchung der Strömung um vorn spitze und schlanke vorgegebene Rotationskörper kleiner Querschnittsänderung wird auf die nichtlinearen Kompressibilitätseinflüsse verzichtet. In Körpernähe läßt sich die linearisierte gasdynamische Gleichung in eine konvergente Reihe von Differentialgleichungen zerlegen. Ihre Lösungen geben die von einer Summe auf der Körperachse liegender unbekannter Quell- und Dipolverteilungen induzierte Strömung. Die Summen der Potentialfunktionen und der Singularitätenverteilungen bestehen aus Gliedern stetig abnehmender Größenordnung. Dadurch wird auch die Randbedingung der Strömung für Punkte der Körperoberfläche in eine Summe von Bestimmungsgleichungen abnehmender Größenordnung

*) Aus dem Institut für angewandte Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.

für die Glieder der gesuchten Verteilung der Quellen (axiale Anströmung) und Dipole (Anteil der Querströmung) zerlegt. Die zweiten und alle folgenden Glieder dieser Summen zeigen den Einfluß des charakteristischen physikalischen Unterschiedes von Unter- und Überschallströmungen und der MACH-Zahl auf die Singularitätenverteilungen.

Eine vollständige Darlegung dieser Theorie wird veröffentlicht im ersten Teil der Arbeit von F. KEUNE, Berechnung der Quell- und Dipolverteilungen zur Darstellung der Überschallströmung an vorgegebenen Rotationskörpern, Miszellen der Angewandten Mechanik, Akademie-Verlag.

Anschrift: Dr. FRIEDRICH KEUNE (22c) Aachen, Maria-Theresia-Allee 17

Experimenteller Nachweis von stetiger transsonischer Kompression in Gasströmungen

Von EBERHARD KOPPE*)

Seit langer Zeit beschäftigt man sich in der Gasdynamik mit der Frage, ob eine kompressible Strömung eines stetigen Überganges von Überschallgeschwindigkeit zu Unterschallgeschwindigkeit fähig ist.

Bei Experimenten mit ausgeprägtem Überschallbereich wurde immer nur die unstetige Kompression mittels Verdichtungsstöße beobachtet. Andererseits kennt man seit TSCHAPLYGIN (1904) eine Klasse transsonischer Strömungen, bei denen ein Überschallbereich mit stetiger Rückkehr zu Unterschallgeschwindigkeit in ein Unterschallgebiet eingebettet ist,

Während eine Reihe von Forschern diese Lösungen als isolierte „Eigenlösungen“ ansahen, war von M. SCHÄFER [1] die Stabilität für solche gemischte Überschall–Unterschallfelder gegenüber kleinen Randstörungen theoretisch nachgewiesen.

Die Experimente, über die im folgenden berichtet wird, sollten diese „transsonische Kontroverse“ von der experimentellen Seite her zu klären suchen.

Zur Versuchsanordnung

Bild 1 zeigt eine Prinzipskizze der untersuchten Strömung. Zwei Stromlinien aus dem von RINGLEB [2] berechneten Strömungsfeld einer transsonischen Umströmung eines Halbkörpers bilden die Kanalwände. Theoretisch ist bei passender Auswahl der Randstromlinien um den Konturscheitel herum ein in die Unterschallströmung eingebetteter Überschallbereich zu erwarten.

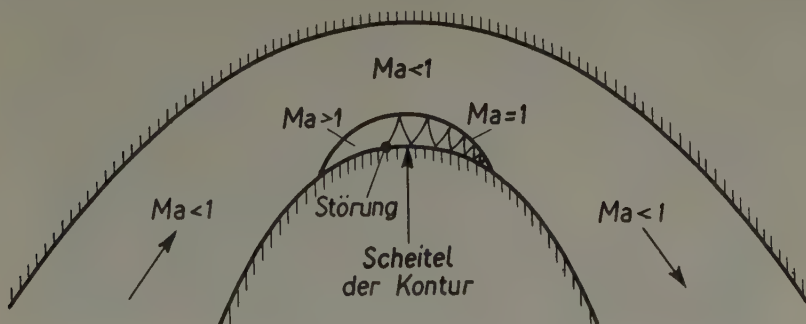


Bild 1. Prinzipskizze der untersuchten Strömung

Bisher wurde wohl immer bei Experimenten mit transsonischer Strömung an Halbprofilen oder an gekrümmten Wänden die zu untersuchende Kontur in die Wand einer geraden Meßstrecke eingebracht. Zwischen der Wandung der Meßstrecke und der Kontur mußte also irgend ein Übergang hergestellt werden. Es ist zu erwarten, daß von derartigen Anschlußstellen Meßstreckenwand–Kontur Störungen ausgehen. Das bisher beobachtete Auftreten von Verdichtungsstößen bei Rückkehr von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit mag zum Teil durch solche unzulässige Störungen bedingt gewesen sein.

Bei unseren Versuchen wurde diese Schwierigkeit von vornherein dadurch ausgeschlossen, daß die übliche Unterteilung des Kanals in Einlauf, Düse, Meßstrecke mit Kontur, Auslauf und Drosseldüse aufgegeben wurde. Der gesamte Kanal wurde als eine Einheit angesehen. Zwischen

*) Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.

Einlauf und abschließender Drosseldüse wurden von einer MACHschen Zahl von $Ma\ 0,2$ bis zum Wiederabsinken der Geschwindigkeit auf denselben Wert die Kanalwände von den berechneten Stromlinien gebildet.

Bei der Auswahl der Randstromlinien war eine Reihe etwas schwierig zu vereinender Gesichtspunkte zu berücksichtigen:

1. Die MACHsche Zahl im Konturscheitel sollte merklich über $Ma = 1$ liegen.
2. Die Maximalgeschwindigkeit, die im Scheitel der Kontur auftritt, sollte andererseits genügend weit unter derjenigen Geschwindigkeit $V_{\max} = 1,667 a_0$ (a_0 = Ruheschallgeschwindigkeit) liegen, bei der nach der Theorie zum erstenmal TOLLMIENSche Grenzlinien auftreten.
3. Der Überschallbereich sollte quer zur Wand genügend hoch sein, um bequem beobachten zu können.
4. Die gegenüberliegende Wand sollte möglichst weit von der Schallgrenze entfernt sein. Gleichzeitig sollte die Geschwindigkeit an dieser Wand relativ zur Schallgeschwindigkeit klein bleiben. Der Einfluß der Störungen, die von dieser Wand ausgehen, sollte damit klein gehalten werden.

5. Mit den vorangehenden Forderungen mußten schließlich die technischen Gegebenheiten abgestimmt werden. Es stand für intermittierenden Betrieb ein Vakuumbehälter von 10 cbm Inhalt zur Verfügung. Die Meßzeit sollte wenigstens 5 sec betragen.

Die MACHsche Zahl im Konturscheitel wurde schließlich zu $Ma_s = 1,21$, die MACHsche Zahl an der gegenüberliegenden Wand zu $Ma_s = 0,64$ gewählt. Als besonders wichtig erwies sich, daß die den Kanal abschließende Drosseldüse sehr fein von Zehntelmillimeter zu Zehntelmillimeter verstellt werden konnte.

Da die theoretischen Lösungen sich auf reibungsfreie Strömungen beziehen, wurde die Grenzschicht abgesaugt. Die Konturwand war dazu in geeigneter Weise perforiert. Als Nebeneffekt tritt allerdings durch die Perforation eine Verminderung der Reflektion von Störungen an der Kontur auf. Andererseits bringt die Perforation andere Störungen mit sich.

Die Versuche

Wird die Geschwindigkeit im Kanal langsam erhöht, so erscheint bei geringem Überschreiten der Schallgeschwindigkeit im Konturscheitel um diesen herum ein Überschallbereich. Dieser Überschallbereich geht stetig wieder in das Unterschallgebiet über. In Strömungsrichtung erstreckt sich der Überschallbereich fast bis zu dem Punkt der Kontur, in dem das Ende des theoretischen Überschallbereiches liegen sollte. Mit Erhöhung der Scheitelgeschwindigkeit wächst die Querausdehnung des Überschallbereiches etwa bis zur voraus berechneten Höhe von ca. einem Viertel der Kanalhöhe im Scheitel (45 mm). Die Erstreckung des Überschallbereiches in Strömungsrichtung ändert sich mit wachsender Scheitelgeschwindigkeit nur wenig (Bild 2).

Man bemerkt, daß nur stärkere Störungen an der Schallgrenze sichtbar reflektiert werden. Kleine Störungen scheinen dagegen durch den Einfluß des Unterschallbereiches praktisch ausgelöscht zu sein.

Diese Feststellung ist deshalb bemerkenswert, weil die Nichtexistenz stetiger transsonischer Strömungen zuweilen wie folgt plausibel gemacht werden soll: Eine vom Profil ausgehende Störung pflanzt sich längs einer MACHschen Linie fort, wird an der Schallgrenze reflektiert, kommt zurück zum Profil, usw., bis sie schließlich an der Stelle ankommt, wo die Schallgrenze auf das Profil stößt. (In Bild 1 ist dieser hypothetische Vorgang angedeutet.) Alle Störungen würden sich auf diese Weise bis zu der kritischen Stelle am Ende des Überschallbereiches fortpflanzen und dort ansammeln. Da man weiß, daß die Strömung gegen Störungen in der Nähe dieses Punktes besonders empfindlich ist, wird ein Zusammenbrechen der stetigen Strömung verständlich.

Nach unseren Schlierenaufnahmen ist eine solche Argumentation nicht länger haltbar.

Etwa beim Erreichen derjenigen Scheitelgeschwindigkeit ($Ma_s = 1,21$), für die die Kontur ausgelegt ist, bemerkt man stellenweise kleine Unregelmäßigkeiten im Feld der MACHschen Linien. Man könnte vielleicht von einer Tendenz zur Bildung von Enveloppen MACHscher Linien und damit zur Grenzlinienbildung sprechen.

Bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit verstärken sich die Unregelmäßigkeiten. Es kommt zur Ausbildung von Verdichtungsstößen (Bild 3).

Von diesen Ergebnissen aus werden auch die Befunde früherer Versuche z. B. [3] und [4] besser verständlich. Die Frage, ob man einen Überschallbereich mit stetigem Übergang zu Unterschall beobachtet, hängt nicht nur von den lokalen Bedingungen ab — etwa von der Geometrie des Profils in der Nähe der Schallgrenze — sondern auch von dem gesamten Strömungsfeld, insbesondere den Verhältnissen beim Übergang Kanalwand—Profil. Je flacher das in eine Kanalwand eingebaute Profil ist, um so wahrscheinlicher ist das Auftreten eines Bereiches mit stetiger transsonischer Kompression bei geringfügigem Überschreiten von $Ma_{\text{lokal}} = 1$ im Scheitel

des Profils, um so geringer ist allerdings auch die Erstreckung eines derartigen Überschallbereiches quer zur Strömungsrichtung, so daß eine gesicherte visuelle Beobachtung nur schwer möglich ist. Bei merklichem Überschreiten von $Ma_{\text{lokal}} = 1$ im Scheitel treten in diesen Fällen sehr bald Verdichtungsstöße auf.

Die Schlierenaufnahmen stammen aus Versuchen meines Mitarbeiters, Herrn GERD MEIER.

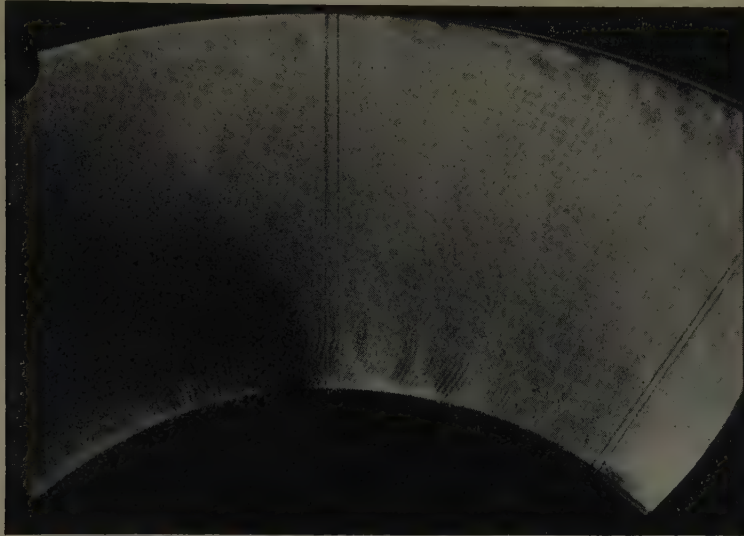


Bild 2. Strömung mit lokalem Überschallbereich und stetiger transsonischer Kompression, MACH-Zahl im Konturscheitel $Ma_S = 1,18$ (Schlierenaufnahme, Markierungen im Scheitel und am Ende des berechneten Überschallbereiches)

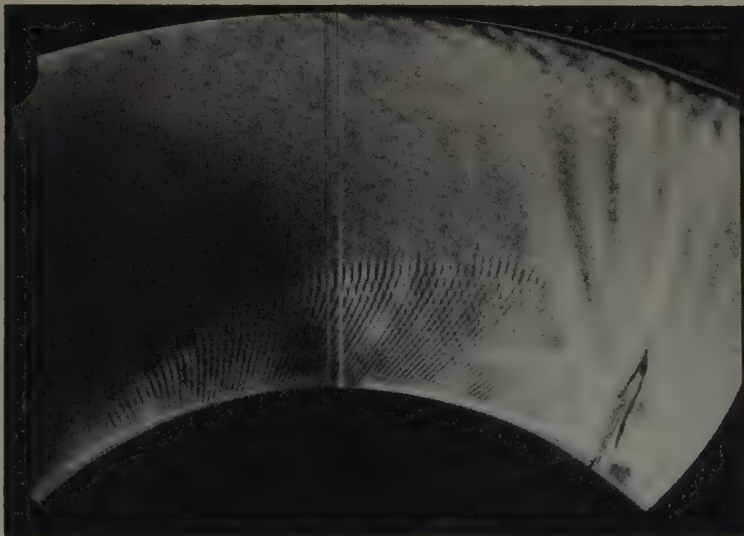


Bild 3. Strömung mit lokalem Überschallbereich, der durch einen Verdichtungsstoß abgeschlossen wird. MACH-Zahl im Konturscheitel $Ma_S = 1,58$

Zusammenfassung

In einer besonderen Kanalanordnung, deren Wände den Stromlinien transsonischer Strömungen um Halbkörper mit Schaufelkontur nachgebildet waren, wurde die Frage der stetigen transsonischen Kompression untersucht.

Dabei konnte ein ausgeprägter in ein Überschallgebiet eingebetteter Überschallbereich mit stetigem Übergang zu Unterschallgeschwindigkeit beobachtet werden, solange eine gewisse MACHsche Zahl im Konturscheitel nicht überschritten wurde. Bei Änderung der Durchflußbedingungen änderte sich die untersuchte Strömung stetig. Ein etwaiges Auftreten von Verdichtungsstößen kündigte sich vorher an.

Die SCHÄFERSchen Stabilitätsaussagen sind damit für diese Klasse von Strömungen bestätigt. Da jede materiell hergestellte Kontur gegenüber ihrem mathematischen Idealbild als gestört angesehen werden muß, ist die Existenz von stabilen stetigen transsonischen Strömungen nicht nur bei Änderung der Anströmbedingungen, sondern auch bei im Überschallbereich abgeänderter Kontur gesichert.

Literatur

- [1] M. SCHÄFER, Über die stetige Rückkehr gestörter Überschallströmungen in den Unterschallbereich bei gemischten Strömungsfeldern, *J. Rat. Mech. Anal.* **5** (1956), p. 217—250; Zur Stabilität von stoßfreien transsonischen Gasströmungen, Vortrag WGL-Tagung 1958, Jahrbuch der WGL 1958, S. 64—70.
- [2] F. RINGLEB, Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung, *ZAMM* **20**, (1940), S. 185—198.
- [3] W. FRÖSSEL, Experimentelle Untersuchung der kompressiblen Strömung an und in der Nähe einer gewölbten Wand, *Mitt. MPI f. Strömungsforschung Göttingen*, Nr. 4 (1951).
- [4] R. MICHEL, F. MARCHAUD, J. LE GALLO, Etude des écoulements transsoniques autour des profils lenticulaires, α incidence nulle, O.N.E.R.A. Publ. No. 65 (1953).

Anschrift: Dr. EBERHARD KOPPE, Göttingen, Stettinerstr. 35

Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung

Von EBERHARD LANCKAU

(Erscheint demnächst ausführlich in dieser Zeitschrift)

Theoretische und experimentelle Untersuchung einer rotationssymmetrischen laminaren Düsendgrenzschicht

Von ALFONS MICHALKE*)

Die vorliegende Arbeit [1] entstand im Rahmen des Forschungsprogramms des Instituts für Turbulenzforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt. Sie soll ein Beitrag sein zur Klärung des laminar-turbulenten Umschlages in einem Freistrahle hinter einer rotationssymmetrischen Düse bei kleinen Geschwindigkeiten.

Die bisherigen Untersuchungen von WILLE und WEHRMANN [2] haben ergeben, daß offenbar die Düsendgrenzschicht einen gewissen Einfluß auf die Entstehung von Ringwirbeln im Freistrahle hat. Um diesen Einfluß untersuchen zu können, war es das Ziel dieser Arbeit, den laminaren Grenzschichtverlauf in einer rotationssymmetrischen Düse zu berechnen und die Ergebnisse experimentell zu überprüfen. Da keine bestimmte Düsenkontur vorgegeben war, wurde als Näherung für eine rotationssymmetrische Düsenströmung die Potentialströmung gewählt, die durch einen Ringwirbelfaden hervorgerufen wird, und die Düsenkontur als Teil einer Stromfläche dieser Strömung dargestellt. Die Düsenkontur und die Potentialgeschwindigkeit U an der Düsenwand konnte unter Benutzung elliptischer Integrale berechnet werden (Bild 1 u. 3). Mit der Berechnung dieser Funktionen war die Grundlage für eine Ermittlung der Düsendgrenzschicht gegeben.

Es wurde versucht, Rechnungsverfahren zu benutzen, die bei der Außenströmung von Stromlinienkörpern erfolgreich angewendet worden sind. Diese Umströmung eines Körpers unterscheidet sich potentialtheoretisch aber erheblich von einer Düsenströmung. Deshalb ergaben sich Schwierigkeiten bei der Anwendung dieser Rechnungsverfahren.

Zunächst wurde für die Berechnung der Düsendgrenzschicht die GÖRTLERSche Potenzreihe [3] angewendet, die eine exakte Lösung der Grenzschichtgleichungen ist. Es zeigte sich aber, daß für die gesamte Lauflänge in der Düse zu viele Glieder dieser Potenzreihe hätten berücksichtigt werden müssen.

*) Institut für Turbulenzforschung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V., Berlin-Charlottenburg.

Die Anwendung des Verfahrens von POHLHAUSEN und HOLSTEIN [4], das mit dem Impulssatz der Grenzschichttheorie arbeitet, und des Verfahrens von TRUCKENBRODT [5], das den Impuls- und Energiesatz verwendet, führten bei der Düsenströmung nicht zum Erfolg.

Schließlich wurde ein Verfahren von KOTSCHIN und LOIZJANSKI [6] untersucht, das auf dem Impulssatz basiert. Als Ansatz für das Grenzschichtgeschwindigkeitsprofil wählt KOTSCHIN die sogenannten HARTREE-Profile

$$u(x, y) = U(x) \cdot \Phi'(\eta, \beta)$$

wobei $\Phi(\eta, \beta)$ Lösung der Grenzschichtgleichung für die Potentialströmung

$$U(x) = c \cdot x^{\frac{\beta}{2-\beta}};$$

x = Bogenlänge, y = Normale zur Wand ist. Bei KOTSCHIN ist

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu \beta(x)} \cdot \frac{dU}{dx}}.$$

Er erhält mit diesem Ansatz aus dem Impulssatz eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung, mit der der Parameter $\beta(x)$ bestimmt wird, und in der $U''(x)$, $U'(x)$, $U(x)$ explizit auftreten. Dadurch wird aber das KOTSCHIN-Verfahren für die Berechnung der Düsen Grenzschicht unbrauchbar, da sich für die Wirbelfadendüse $U''(x)$ exakt wohl überhaupt nicht und näherungsweise nur unzureichend genau berechnen läßt. Darüber hinaus wird das KOTSCHIN-Verfahren singular für $U'(x) = 0$. Im engsten Querschnitt der Düse ist aber $U' = 0$.

Um diese Nachteile für die Berechnung der Düsen Grenzschicht zu vermeiden, wurde vom Verfasser dieses Verfahren modifiziert und im Gegensatz zu KOTSCHIN als dimensionslose Grenzschichtkoordinate η gesetzt:

$$\eta = y \cdot \sqrt{\frac{1}{2 - \beta(x)} \cdot \frac{U(x)}{\nu \cdot x}}.$$

Dieser Ansatz ist möglich, weil für die Keilströmungen die Identität

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\beta}{2 - \beta} \cdot \frac{U(x)}{x}$$

besteht.

Aus dem Impulssatz ergibt sich mit diesem modifizierten Ansatz eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung für eine Grenzschichtfunktion, in der nur $U'(x)$ und $U(x)$ explizit auftreten. Die Lösung dieser Gleichung kann numerisch ermittelt werden. Andererseits läßt sich die Lösung geschlossen angeben, wenn man 2 Hilfsfunktionen dieser Gleichung durch einfache Funktionen annähert. Diese Vereinfachung ist für beschleunigte Strömung möglich. Mit der so berechneten Grenzschichtfunktion läßt sich nach einer einfachen Formel die Verdrängungsdicke δ^* bestimmen.

Der Vorteil dieses vereinfachten, modifizierten KOTSCHIN-Verfahrens besteht darin, daß zur Ermittlung der Verdrängungsdicke nur die Potentialgeschwindigkeit, nicht aber auch ihre Ableitung bekannt sein muß. Ein Nachteil ist es aber, daß die 1. Wandbindung im allgemeinen nicht erfüllt ist.

Später wurden die Ergebnisse dieses Verfahrens mit einer Rechnung nach einer Methode von ZAAAT [7] überprüft. Es zeigte sich gute Übereinstimmung in den Ergebnissen.

Für den Grenzschichtverlauf ergab sich folgendes Bildungsgesetz:

$$\frac{\delta^*}{D} = \frac{f(\sigma)}{\sqrt{Re}}; \quad Re = \frac{U_0 \cdot D}{\nu}.$$

Den Verlauf der Grenzschichtortsfunktion $f(\sigma)$ in der Düse zeigt Bild 3.

Diese theoretischen Ergebnisse wurden experimentell überprüft.

Die Messungen erfolgten an Wirbelfadendüsen, die gemäß der theoretischen Düsenkontur hergestellt waren. Die Geschwindigkeitsprofile der Grenzschicht wurden mit einem Konstant-Temperatur-Hitzdrahtmeßgerät mit Linearisierungsstufe gemessen. Die Hitzdrahtsonde konnte senkrecht zur Düsenoberfläche mit Hilfe eines kleinen Synchronmotors bewegt werden. Dadurch war in Verbindung mit einem Lichtpunktschreiber eine kontinuierliche Aufzeichnung der Grenzschichtgeschwindigkeitsprofile möglich.

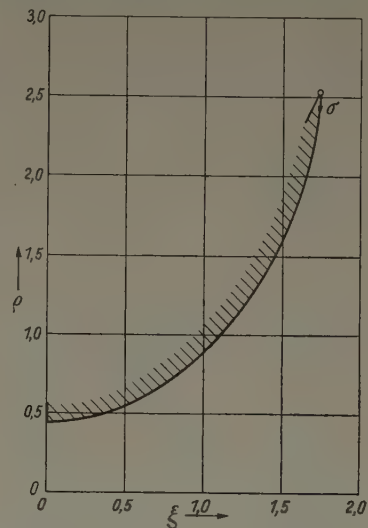


Bild 1. Wandkontur der Wirbelfadendüse. (ξ, ρ) mit dem Wirbelringradius dimensionslos gemachte Zylinderkoordinaten, σ dimensionslose Bogenlänge

Zunächst wurde im Endquerschnitt der Düse die Abhängigkeit der Verdrängungsdicke von der REYNOLDSSchen Zahl überprüft. Für verschiedene Geschwindigkeiten wurden dort die Geschwindigkeitsprofile nach der schon erwähnten Meßmethode aufgezeichnet. Die Integration zur Bestimmung der Verdrängungsdicke

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy$$

erfolgte numerisch.

Die Auswertung der Meßergebnisse zeigt Bild 2.

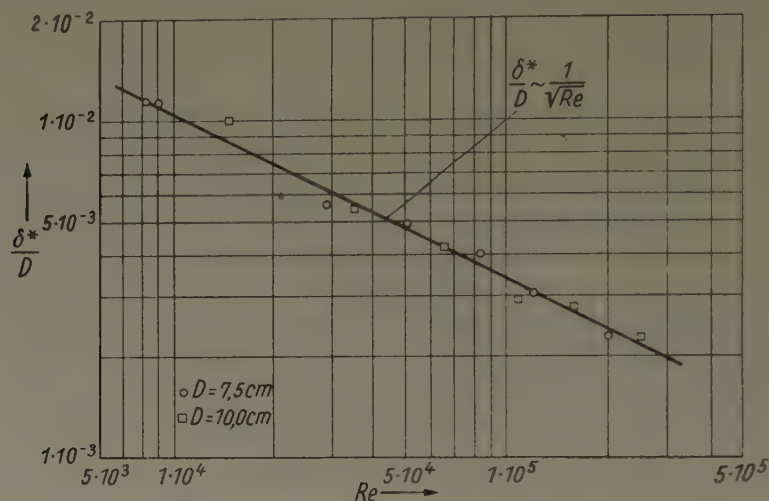


Bild 2. Verdrängungsgrenzschichtdicke δ^*/D im Endquerschnitt der Wirbelfadendüse in Abhängigkeit von der REYNOLDSSchen Zahl $Re = U_0 D/\nu$; U_0 = Geschwindigkeit in der Mitte des Düsenendquerschnittes; D = Düsendurchmesser

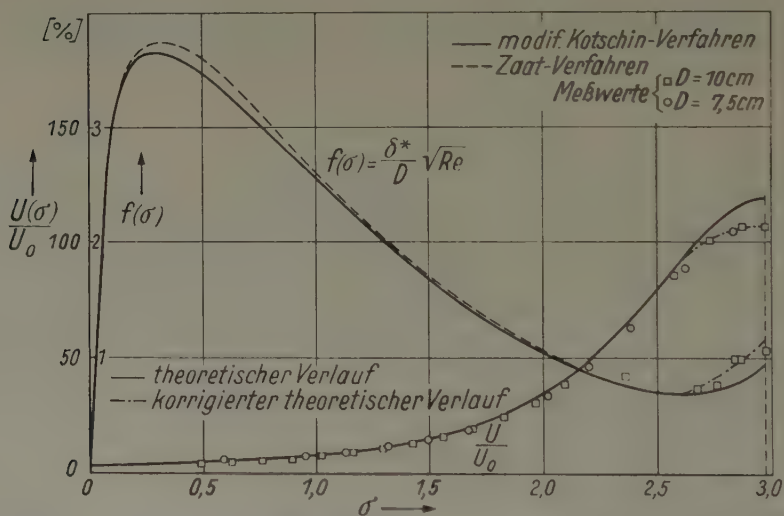


Bild 3. Verlauf der Wandpotentialgeschwindigkeit $U(\sigma)/U_0$ und der Grenzschichtortsfunktion $f(\sigma) = \delta^* \cdot \sqrt{Re}/D$ in der Wirbelfadendüse; U_0 = Geschwindigkeit in der Mitte des Düsenendquerschnittes; D = Düsendurchmesser, σ = dimensionslose Bogenlänge

Die Verdrängungsgrenzschichtdicke wurde daraufhin auch an anderen Stellen der Düsenkontur ermittelt. Der Vergleich dieser Meßwerte mit der Theorie zeigt Bild 3. Die Grenzschichtdicke ist größer als der Theorie entspricht. In diesem Bereich der Düse, in dem Messungen durchgeführt werden konnten, sind aber auch die Abweichungen im theoretischen und wirklichen Potentialgeschwindigkeitsverlauf maximal. Um den Einfluß der kleineren wirklichen Potentialgeschwindigkeit abschätzen zu können, wurde eine erneute Rechnung des Grenzschichtverlaufs mit einer korrigierten theoretischen Potentialgeschwindigkeit durchgeführt, die den gemessenen Geschwindigkeitsverlauf an der Düsenwand berücksichtigte. Die Ergebnisse dieser korrigierten Rechnung zeigten bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten.

Literatur

- [1] A. MICHALKE, Theoretische und experimentelle Untersuchung einer rotationssymmetrischen laminaren Düsengrenzschicht (erscheint demnächst als DVL-Bericht).
- [2] R. WILLE, O. WEHRMANN, Beitrag zur Phänomenologie des laminar-turbulenten Übergangs im Freistrahle bei kleinen Geschwindigkeiten, Grenzschichtforschung, IUTAM Symposium 1957, Springer-Verlag 1958.
- [3] H. GÖRTLER, A New Series for Calculation of Steady Laminar Boundary Layer Flows, Journ. Math. Mech. 6 (1957).
- [4] H. SCHLICHTING, Grenzschicht-Theorie, 2. Auflage (1954), S. 192 bzw. S. 204.
- [5] E. TRUCKENBRODT, Ein Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung, Ing. Arch. 20 (1948).
- [6] N. J. KOTSCHIN, Theoretische Hydromechanik II, Berlin 1955, Akademie-Verlag, S. 451.
- [7] J. A. ZAAT, A Simplified Method for Calculation of Three-Dimensional Laminar Boundary Layer, NLL-Report F 184 (1956).

Anschrift: Dipl.-Ing. ALFONS MICHALKE, Berlin-Charlottenburg 9, Marathonallee 10

Eine einfache experimentelle Methode zur Sichtbarmachung von Tollmien-Wellen und Görtler-Wirbeln

Von KARL NICKEL und WILLI SCHÖNAUER*)

Die Instabilität einer laminaren Grenzschicht gegenüber zweidimensionalen instationären Wellen wurde im Jahre 1929 zum ersten Male von W. TOLLMIESEN [1] nachgewiesen. Die experimentelle Bestätigung der TOLLMIESENschen Theorie gelang erst über ein Jahrzehnt später durch

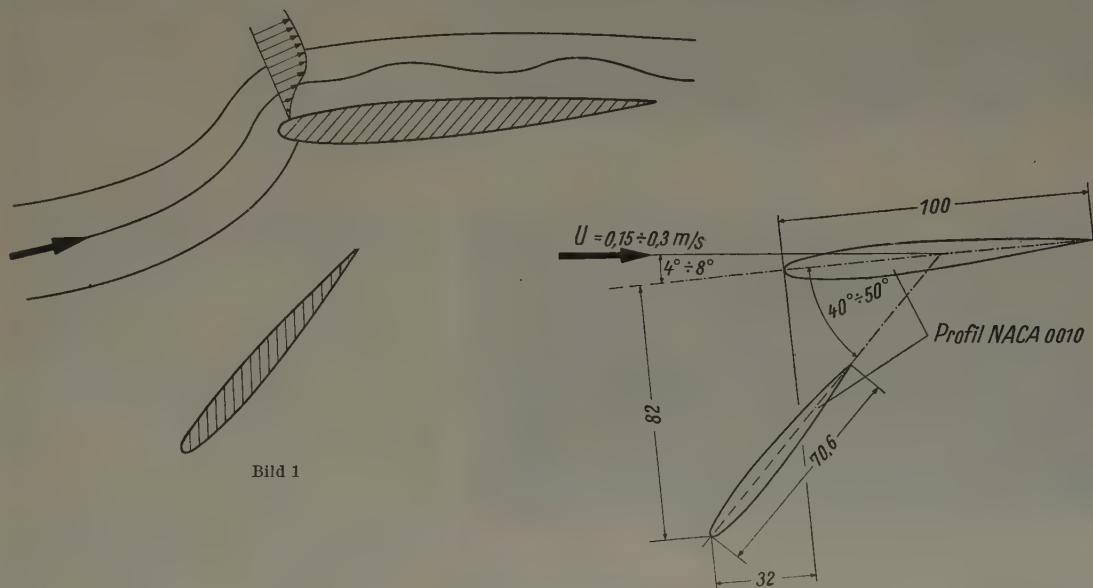


Bild 1

Bild 2

G. B. SCHUBAUER und H. K. SKRAMSTAD [2]. SCHUBAUER und SKRAMSTAD arbeiteten mit Luft als strömendem Medium und wiesen die TOLLMIESEN-Wellen durch Oszillogramme von Hitzdrahtsignalen nach. Eine direkte experimentelle Sichtbarmachung der TOLLMIESEN-Wellen gelang unseres Wissens bisher allein F. X. WORTMANN [3] mit seiner Tellur-Methode im Wasserkanal. Die WORTMANNschen Messungen eignen sich jedoch nicht sehr gut zur Aufnahme mittels Foto oder Film. Mit der nachfolgend beschriebenen Versuchsanordnung gelingt es nun sehr einfach, den Umschlag von laminarer in turbulente Grenzschicht im Wasserkanal sichtbar zu machen, zu filmen und auch zu fotografieren. Die beiden wesentlichen Ursachen für den Erfolg sind dabei:

1. Entsprechend Bild 1 wurde eine geometrische Anordnung von Hauptflügel und Vorflügel derart gewählt, daß die Grenzschicht am Hauptflügel überall „kurz vor der Ablösung

*) Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

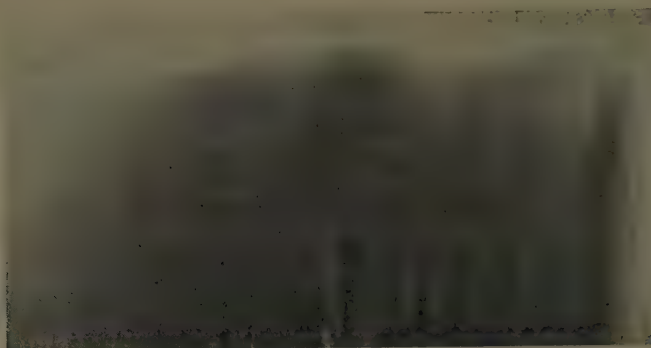


Bild 3

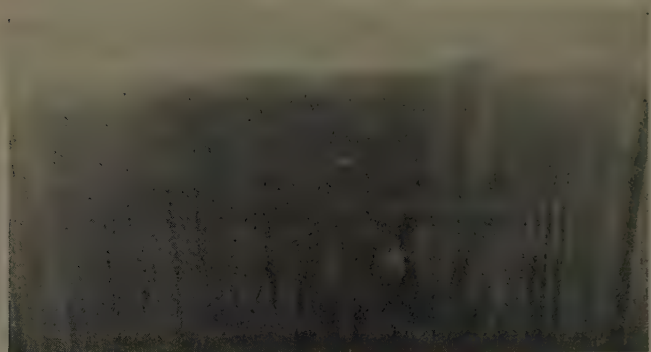


Bild 4

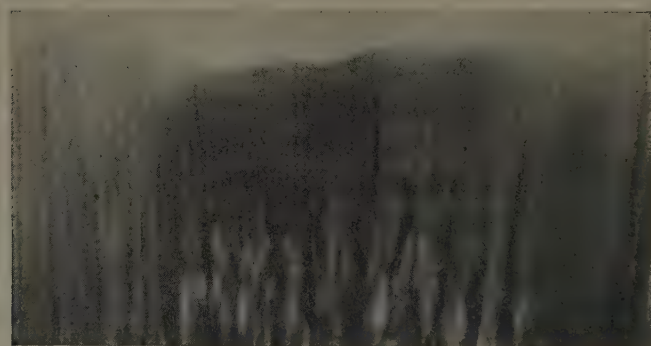


Bild 5

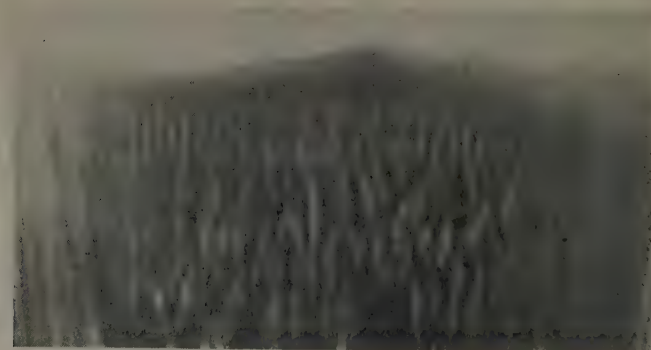


Bild 6

steht“. Dadurch ist sie hochgradig instabil gegen die Anfachung von zweidimensionalen TOLLMIE-Wellen geworden. Kontrollversuche an der ebenen Platte und im Druckabfallbereich zeigten, daß dort eine Sichtbarmachung — entsprechend der geringen Anfachung von Störungen — sehr viel schwieriger oder überhaupt nicht möglich war.

2. Es wurden nicht nur einzelne Stromlinien oder Grenzschicht-Profile markiert, sondern es wurde zu Beginn der Versuche auf einmal die ganze Grenzschicht durch Injektion von Tinte gefärbt. Bei der geringen Strömungsgeschwindigkeit des Wassers blieb diese Farbe für die Dauer von mehr als einer Minute in der Grenzschicht erhalten, so daß nach einer Störung der Umschlag laminar-turbulent beobachtet werden konnte.

Die beobachteten Resultate sind in Bild 2 schematisch eingezeichnet. Bild 3 bis 6 gibt einige Originalaufnahmen. Man erkennt deutlich die zweidimensionalen TOLLMIE-Wellen, die in Strömungsrichtung wandern; in der zweiten Hälfte des Tragflügels sind Längswirbel zu erkennen, die sich als GÖRTLER-Wirbel deuten lassen (vgl. H. GÖRTLER und H. WITTING [4]). Die Wellen wurden ausgelöst durch Störungen von außen (Erschütterung des Wasserkannals; besonders geeignet zur Anfachung erwies sich ein leichtes Oszillieren des Flügels).

Mit dieser Methode ist es zum ersten Mal möglich geworden, den Umschlag laminar-turbulent mit einfachen Mitteln etwa für Vorlesungsversuche sichtbar zu machen. Das mitgeteilte Verfahren beansprucht nicht, für quantitative Messungen verwendbar zu sein, es tritt also nicht in Konkurrenz zu den sehr genauen Messungen von SCHUBAUER und SKRAMSTAD oder WORTMANN.

Auf der GAMM-Tagung wurde ein Farbfilm vorgeführt, der sehr deutlich das Wandern der TOLLMIE-Wellen und ihr Zusammenbrechen bei größeren Störungen zu Längswirbeln zeigte.

Literatur

- [1] W. TOLLMIE, Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitteilung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse (1929), S. 21—44; siehe auch NACA Techn. Mem. Nr. 609 (1931).
- [2] G. B. SCHUBAUER, H. K. SKRAMSTAD, Laminar boundary layer oscillations and stability of laminar flow, National Bureau of Standards Research Paper 1772. Wiederabdruck eines geheimen NACA-Berichtes

vom April 1943, später freigegeben als NACA War-time Report W-8, und J. Aeron. Sci. 14 (1947), S. 69; vgl. auch NACA Rep. 909.

- [3] F. X. WORTMANN, Untersuchungen instabiler Grenzschichtschwingungen in einem Wasserkanal mittels der Tellur-Methode, Festschrift „Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung“, Braunschweig 1955, S. 460—470.
- [4] H. GÖRTLER, H. WITTING, Theorie der sekundären Instabilität der laminaren Grenzschichten, Grenzschichtforschung, Symposium Freiburg/Breisgau 26. bis 29. August 1957, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Anschriften: Doz. Dr. K. NICKEL, Karlsruhe-Rintheim, Brettener Str. 9
Dipl.-Ing. W. SCHÖNAUER, Karlsruhe-Durlach, Nonnenbühl 7

Iterationsverfahren zur Berechnung von Strömungen vom Wellenausbreitungstypus

Von K. OSWATITSCH

Die folgenden Ausführungen gelten für alle quasilinearen hyperbolischen Probleme mit zwei unabhängigen Veränderlichen, also für die instationäre Ausbreitung von ebenen Wellen, Zylinder- und Kugelwellen sowie für die stationäre ebene und achsensymmetrische Überschallströmung endlicher Amplitude.

Die ebene instationäre und die ebene stationäre Überschallströmung bietet allerdings wegen ihrer Einfachheit kein Problem. Zylinder- und kugelsymmetrische Probleme wurden bisher bei großen Störungen im allgemeinen mit graphischen Charakteristikenmethoden berechnet, wobei allerdings auf analytische Ergebnisse für die Luftkräfte, auf asymptotische Resultate für große Zeiten und ähnliches verzichtet werden muß. Die übliche Iteration mit den Koordinaten der Strömungsebene als unabhängige Veränderliche versagt im allgemeinen bei quasilinearen hyperbolischen Problemen, weil die Lage der Charakteristiken in großen Abständen falsch wieder gegeben wird und die Einflußgebiete damit nicht richtig erfaßt werden.

Es wird daher im folgenden, wie beim ebenen Problem schon früher von anderen Autoren und wie stets bei den Charakteristikenverfahren, die MACH-Linie als unabhängige Veränderliche eingeführt und sowohl der Strömungszustand als auch beide Ortskoordinaten der Strömungsebene nach einem Parameter entwickelt, der ein Maß für die Größe der Störung ist. Durch Vergleich der Glieder gleicher Parameterpotenzen erhält man ein Differentialgleichungssystem für die Zustandsgrößen und ein zweites Differentialgleichungssystem für die Ortskoordinaten, die abwechselnd schrittweise gelöst werden können. Die Formeln für die Ortskoordinaten werden auf Quadraturen zurückgeführt. Die Zustandsvariablen höherer Näherung ergeben sich mittels der RIEMANNschen Integrationstheorie mit bekannten RIEMANNschen Funktionen. Bereits aus dem ersten Schritt folgen die Verdichtungsstöße als Faltungen in der Strömungsebene.

Das Verfahren hat gewisse Beziehungen zur POINCARÉ-LIGHTHILL-Methode. Eine Reihe von Fragen sind noch zu klären, wie die systematische Übertragung der Randbedingungen in der Charakteristikenebene, die Berücksichtigung anisentroper Vorgänge und die Übertragung auf drei unabhängige Veränderliche. Für letzteres wurden vom Verfasser für bestimmte Probleme bereits gewisse Erfolge erzielt.

Die Arbeit soll demnächst in der Zeitschrift für Flugwissenschaften erscheinen.

Anschrift: Prof. Dr. K. OSWATITSCH, Institut für theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen, Theaterstr. 13

Das Verhalten suspendierter Feststoffteilchen in Scherströmungen hoher Zähigkeit*)

Von JÜRGEN RAASCH

1. Einleitung

Es wird über eine rein theoretische Arbeit berichtet, die zu dem Zwecke begonnen wurde, bestimmte Vorgänge in Misch- und Knetmaschinen aufzuklären. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind jedoch nicht nur in dem erwähnten Zusammenhang von Interesse, sondern unter anderem auch für das Gebiet der Flüssigkeitsschmierung in Gleitlagern.

*) Mitteilung aus dem Institut für Mechanische Verfahrenstechnik an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Um die folgenden Probleme einer rechnerischen Behandlung zugänglich zu machen, war es nötig, einige Vereinfachungen vorzunehmen.

Es wurde angenommen,

1. es sei eine homogene Flüssigkeit gegeben, in der einzelne feste Teilchen von definierter Gestalt suspendiert sind,
2. die Viskosität der Flüssigkeit sei konstant, η
3. die Flüssigkeit sei inkompressibel,
4. die Strömungsvorgänge seien dadurch charakterisiert, daß Massenkräfte gegenüber Oberflächenkräften vernachlässigt werden dürfen.

Durch diese Annahmen wurde der Problemkreis eingeschränkt auf die Untersuchung langsamer zäher Strömungen, sogenannter schleicher Strömungen, die durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \cdot \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \eta \cdot \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \cdot \Delta w \quad \dots \dots \dots (1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots \dots \dots (2).$$

Dieses Gleichungssystem ist linear und in vielen Fällen auch lösbar. Die bekannteste Lösung ist diejenige von STOKES für den Strömungswiderstand einer Kugel [2].

Für zweidimensionale Probleme vereinfachen sich die Differentialgleichungen. Wenn man durch

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (3)$$

eine sogenannte Stromfunktion einführt, ist die Kontinuitätsgleichung (2) identisch erfüllt. Aus (1) folgt durch partielle Differentiation

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

die Bipotentialgleichung als Grundgleichung für alle ebenen Probleme.

2. Einzelteilchen im endlich ausgedehnten Strömungsraum

Anstelle der gleichmäßigen Anströmung beim STOKESSchen Widerstandsproblem soll jetzt eine geradlinige Scherströmung angenommen werden (Bild 1). In der Mittelebene dieser Scherströmung befinde sich eine Kugel vom Radius r_0 . Das Koordinatensystem sei auf den Mittelpunkt der Kugel bezogen. In der Scherströmung wird sich die Kugel mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_E = \frac{c}{2} \quad \dots \dots \dots (5)$$

um die z-Achse drehen, wie man durch Überlagerung einer Rotation über das gesamte System auch ohne Rechnung zeigen kann. Die Aufgabe besteht darin, drei Funktionen u, v, w anzugeben, die den Gleichungen (1) und (2) genügen, die die Haftbedingung an der Kugeloberfläche erfüllen und die in sehr großer Entfernung in die ungestörte Scherströmung übergehen.

Dieses Problem ist zuerst von BURGERS im Jahre 1938 gelöst worden [3]. Die Lösung lautet:

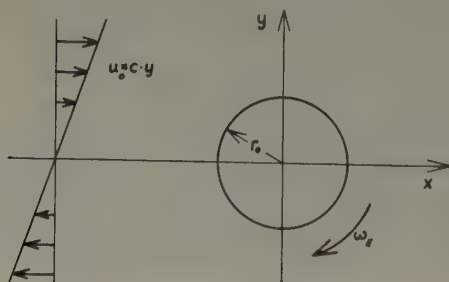


Bild 1. Kugel in geradliniger Scherströmung

$$\left. \begin{aligned} u &= c \cdot y \left[1 - \frac{5}{2} \frac{r_0^3 \cdot x^2}{r^5} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{r_0^5}{r^5} \right], \\ v &= c \cdot x \left[-\frac{5}{2} \frac{r_0^3 \cdot y^2}{r^5} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{r_0^5}{r^5} \right], \\ w &= c \cdot z \left[-\frac{5}{2} \frac{r_0^3 \cdot x y}{r^5} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Verglichen mit der STOKESSchen Lösung für das Widerstandsproblem klingen in diesem Fall die durch die Kugel verursachten Störungen der Strömung erheblich schneller ab. Hieraus darf man bereits schließen, daß auch der Einfluß begrenzender Wände und weiterer in der Flüssigkeit suspendierter Kugeln eine wesentlich geringere Reichweite hat. Die BURGERSsche Lösung ist — wie die STOKESSche Lösung für das Widerstandsproblem — streng gültig nur im Grenzfall vernachlässigbar kleiner Trägheitskräfte. Die Grenze für die Anwendbarkeit der

STOKESSchen Lösung sind durch zahlreiche Experimente festgelegt worden. Eine solche experimentelle Untersuchung fehlt noch im Falle der Scherströmung, so daß über den Gültigkeitsbereich der BURGERSSchen Lösung vorläufig nichts gesagt werden kann.

Das der STOKESSchen Lösung entsprechende ebene Problem — nämlich die Aufgabe, den Strömungswiderstand eines unendlich langen Kreiszylinders zu berechnen — hat bekanntlich keine sinnvolle Lösung, solange man die Trägheitskräfte der Flüssigkeit nicht zumindest z. T. berücksichtigt. Dieser Tatbestand wird als das STOKESSche Paradoxon bezeichnet.

Bemerkenswerterweise erhält man jedoch für das ebene Problem der Scherströmung um einen Kreiszyylinder auch dann eine Lösung, wenn man die Trägheitskräfte vollständig vernachlässigt.

Die Scherströmung um einen kräftefreien Kreiszyylinder wird beschrieben durch die Stromfunktion

$$\psi = \frac{c}{4} \left[r^2 - \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right] \dots \dots \dots (7),$$

wenn man zur Darstellung Polarkoordinaten benutzt.

Der Gültigkeitsbereich dieser Lösung ist wiederum zunächst unbekannt. Daß die angegebene Lösung überhaupt in einem praktisch interessanten Bereich gültig ist, wurde jedoch bereits durch Versuche bewiesen. REICHARDT hat die Umströmung eines feststehenden Kreiszyinders in einer geradlinigen langsamen Scherströmung untersucht und das Stromlinienbild in photographischen Aufnahmen festgehalten [4]. Nun kann man aber die Lösung für einen feststehenden Zylinder auf die gleiche Weise herleiten wie die für einen kräftefreien Zylinder. Man muß lediglich die Randbedingungen sinngemäß ändern. Dann erhält man wiederum eine vollständige Lösung mit der Stromfunktion

$$\psi = \frac{c}{4} \left[r^2 - 2r_0^2 \ln(r/r_0) - \frac{(r^2 - r_0^2)^2}{r^2} \cos 2\varphi \right] \dots \dots \dots (8).$$

Das damit konstruierte Stromlinienbild zeigt ein beträchtliches Maß an Übereinstimmung mit den REICHARDT'schen Aufnahmen. Daraus folgt, daß unter den entsprechenden Versuchsbedingungen eine Vernachlässigung der Trägheitskräfte offenbar noch möglich ist.

3. Verhalten in Wandnähe und gegenseitige Beeinflussung der Teilchen

Den Einfluß einer ebenen festen Wand und die Vorgänge bei der Begegnung zweier Feststoffteilchen in der Scherströmung kann man für Kugeln nicht explizit durchrechnen. Im ebenen Fall und für unendlich lange Kreiszyylinder lassen sich diese Rechnungen dagegen ausführen, wenn man ein System von Bipolarkoordinaten verwendet. Im übrigen wurde der Lösungsgang durch die Tatsache erleichtert, daß die Bipotentialgleichung nicht nur die ebene langsame zähe Strömung beschreibt, sondern auch ebene elastische Spannungszustände. Damit war es möglich, auch die in der Elastizitätstheorie erprobten Lösungsansätze zu verwenden. Lösungen der Bipotentialgleichung in Bipolarkoordinaten sind von JEFFERY und zahlreichen anderen Autoren angegeben worden [5].

Mit den genannten Mitteln wurde untersucht, wie sich ein Kreiszyylinder in einer Scherströmung parallel zu einer ebenen festen Wand bewegt (Bild 2). Die Rechnung ergab, daß sein Bewegungszustand beschrieben werden kann durch

$$\omega_E = \frac{c}{2} \sqrt{1 - r_0^2/y_0^2}, \quad u_E = c \cdot y_0 \sqrt{1 - r_0^2/y_0^2} \quad (9),$$

wobei mit y_0 der Abstand der Mittellinie des Zylinders von der Wand bezeichnet wurde.

Eine Bewegungskomponente senkrecht zur Wand tritt nicht auf, d. h. beim Fehlen äußerer Kräfte zeigt der Zylinder keinerlei Tendenz, sich der Wand zu nähern oder sich von ihr zu entfernen. Die Nähe der festen Wand verlangsamt lediglich die Bewegung des Zylinders.

Die Begegnung zweier Kreiszyylinder in der Scherströmung ist ein instationärer Vorgang (Bild 3). Wenn man jedoch die Trägheitskräfte durchweg vernachlässigt, besteht in der Behandlung von stationären und instationären Problemen kein Unterschied. Der Strömungsablauf wird in diesem Fall aufgefaßt als eine Folge von Gleichgewichtszuständen.

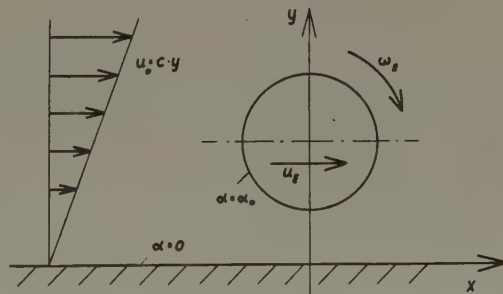


Bild 2. Kreiszyylinder in Wandnähe

Unter den genannten Voraussetzungen war es möglich, den jeweiligen Bewegungszustand zweier gleichgroßer Kreiszylinder exakt zu bestimmen. Die Rechnung ergab

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_E}{c} &= \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin 2n\alpha_0 + n \sin 2\alpha_0} - \frac{1}{2} \right) \cos 2\varepsilon, \\ \frac{u_E}{c \cdot y_0} &= \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sin 2n\alpha_0 + n \sin 2\alpha_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Tg} \alpha_0 \right) \cos 2\varepsilon, \\ \frac{v_E}{c \cdot y_0} &= \frac{\sin^2 \alpha_0}{\cos 2\alpha_0} \cdot \operatorname{Tg} \alpha_0 \cdot \sin 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

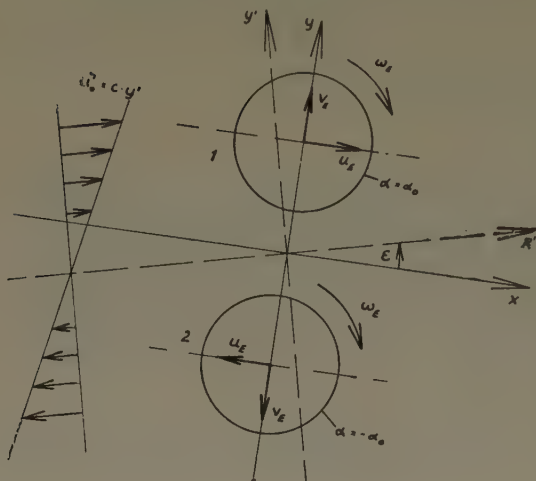


Bild 3. Begegnung zweier Kreiszylinder

Mit y_0 wurde in diesem Fall der halbe Abstand der Zylindermittellinien bezeichnet. Die Bewegungsbahnen selbst ließen sich nicht explizit berechnen. In Bild 4 wurden deshalb in einer großen Zahl von Punkten die Geschwindigkeitsvektoren eingetragen. In dieses Feld von Bahntangenten konnten dann mit einiger Sicherheit die dargestellten Bahnkurven eingezeichnet werden.

Man erkennt aus diesem Bild, daß sich zwei Kreiszylinder in der Scherströmung gegenseitig ausweichen und sich niemals berühren, es sei denn sie berührten sich schon von vornherein. In diesem Fall rotieren sie wie ein fester Körper mit periodisch wechselnder Winkelgeschwindigkeit um die Berührungslinie.

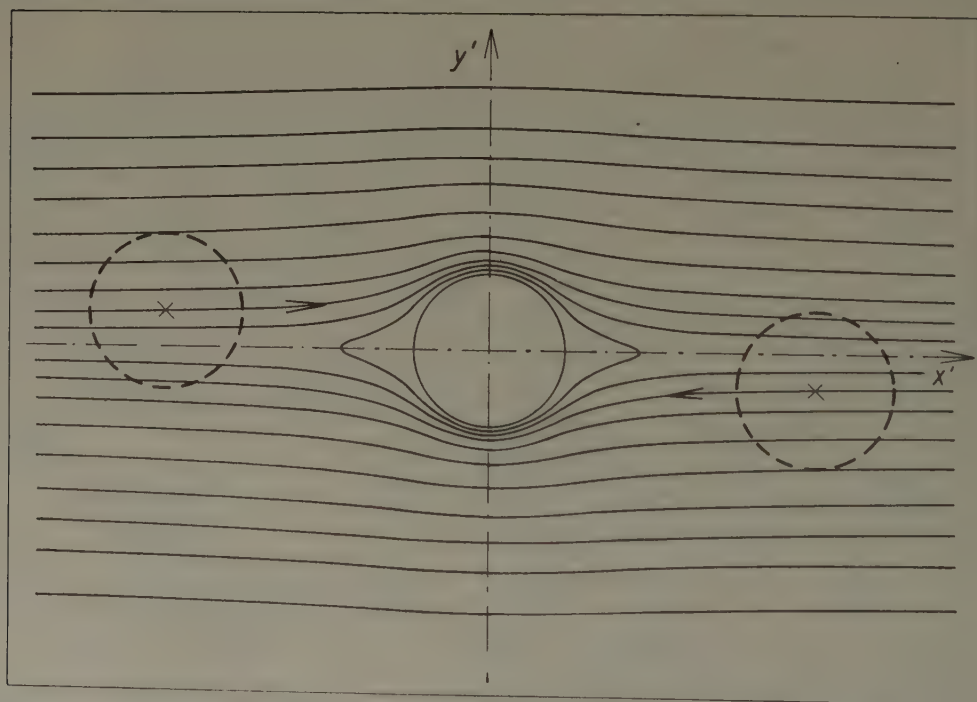


Bild 4. Bewegungsbahnen zweier Kreiszylinder

Offen ist noch die Frage, ob sich beliebig geformte Feststoffteilchen genau so bewegen. Für kugelförmige Teilchen gibt es experimentelle Untersuchungen von BARTOK und MASON [6]. Deren Beobachtungen an Glaskugeln in einer langsamen zähen Scherströmung beschreiben das gleiche charakteristische Verhalten, wie es die Rechnung für zwei Kreiszylinder ergeben hat.

Literatur

- [1] H. SCHLICHTING, Grenschicht-Theorie, 3. Auflage, Verlag G. Braun, Karlsruhe, S. 91.
- [2] G. G. STOCKES, On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums, Trans. Cambr. Phil. Soc. 9 (1850), S. 8.
- [3] J. M. BURGERS, Second Report on Viscosity and Plasticity, Amsterdam 1938, S. 129.
- [4] H. REICHARDT, Über die Umströmung zylindrischer Körper in einer geradlinigen Couetteströmung, Mitt. a. d. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen 1954.
- [5] G. B. JEFFERY, Plane Stress and Plane Strain in Bipolar Coordinates, Phil. Trans. Roy. Soc. London 221 A (1920), S. 265.
- [6] W. BARTOK und S. G. MASON, Particle Motions in Sheared Suspensions, J. Colloid Science 12 (1957), S. 243.

Anschrift: Dipl.-Ing. JÜRGEN RAASCH, Technische Hochschule Karlsruhe, Institut für Mechanische Verfahrenstechnik, Karlsruhe, Kaiserstr. 12

Ermittlung schwacher Druckdifferenzen in Strömungen mit Kavitation

Von H. REICHARDT und W. SATTLER

1. Einleitung

Bewegt sich ein Körper so schnell in einem strömenden Medium, daß in den Bezirken des Unterdruckes der Dampfdruck des Mediums erreicht wird, so siedet hier die Flüssigkeit unter Bildung dampfgefüllter Hohlräume. Diese Erscheinung der Hohlraumbildung in strömenden Flüssigkeiten bezeichnet man als Kavitation. Durch das Auftreten der Kavitation wird das ursprüngliche Strömungsfeld wesentlich verändert.

Der Kavitationszustand wird durch die Kavitationszahl σ gekennzeichnet

$$\sigma = \frac{p - p_k}{q} \dots \dots \dots (1).$$

Hier ist p der Druck der ungestörten Strömung, p_k der Druck im Kavitationsraum und q der Staudruck (p_k ist im allgemeinen gleich dem Dampfdruck p_d).

Für physikalische und technische Untersuchungen werden besondere Versuchsanlagen (Kavitationskanäle) benutzt. Da sich in einer geradlinigen Versuchsstrecke der statische Druck mit der Ortshöhe verändert, so hängt die Kavitationszahl hier auch von der Ortshöhe ab. Um von der Ortshöhe annähernd unabhängige Kavitationszahlen zu erreichen, hat H. REICHARDT [1] die Göttinger Meßstrecke als „Freistrah“ ausgebildet, der zwischen vertikalen Seitenwänden geführt wird. Allerdings ist in der Nähe der Düse, aus der der Strahl austritt, noch ein beachtlicher Einfluß des hydrostatischen Druckfeldes des Düsenraumes auf den Freistrah vorhanden.

2. Problemstellung

Mit dem Fortschreiten der Technik zu immer höheren Geschwindigkeiten gewinnen auch die Strömungsvorgänge bei sehr kleinen Kavitationszahlen größere Bedeutung. Daher muß man in der Lage sein, solche Vorgänge nicht nur zu realisieren, sondern auch meßtechnisch zu beherrschen.

Wenn beispielsweise in der Umgebung eines Modelles $\sigma = (p - p_k)/q = 0,010$ betragen soll, so wird damit vorausgesetzt, daß der statische Druck p in der ungestörten Strömung auf 1% des Staudruckes genau konstant sei. Wie kann man aber diese Konstanz kontrollieren? Wie will man das Gebiet ermitteln, in dem der hydrostatische Druck, der noch in Düsenhöhe wirksam ist, so weit abgeklungen ist, daß er um weniger als 1% des Staudruckes vom Außendruck p_0 abweicht, und womit lassen sich irgendwelche anderen Druckstörungen von dieser Größenordnung nachweisen, die etwa von den Einflüssen der Modellhalterung oder der Wände herrühren?

Da die bekannten statischen Drucksonden solchen Anforderungen auch nicht annähernd gewachsen sind, haben wir uns überlegt, ob es möglich ist, die Erscheinung der Kavitation selbst für eine hinreichend genaue Ermittlung des Druckfeldes nutzbar zu machen.

Wird ein stumpfer zylindrischer Körper in die Strömungsrichtung gestellt, so entwickelt sich mit abnehmender Kavitationszahl an der Stirnfläche des Zylinders ein ellipsoidähnlicher, mit Wasserdampf gefüllter Hohlraum. Die Achse dieses Hohlraumes fällt mit der Zylinderachse

zusammen. Die Länge l des Kavitationsraumes wächst mit abnehmender Kavitationszahl. Die Funktion $l(\sigma)$ (siehe Bild 1) läßt sich experimentell ermitteln, wenn der Staudruck und der statische Druck der Eichströmung hinreichend genau bekannt sind.

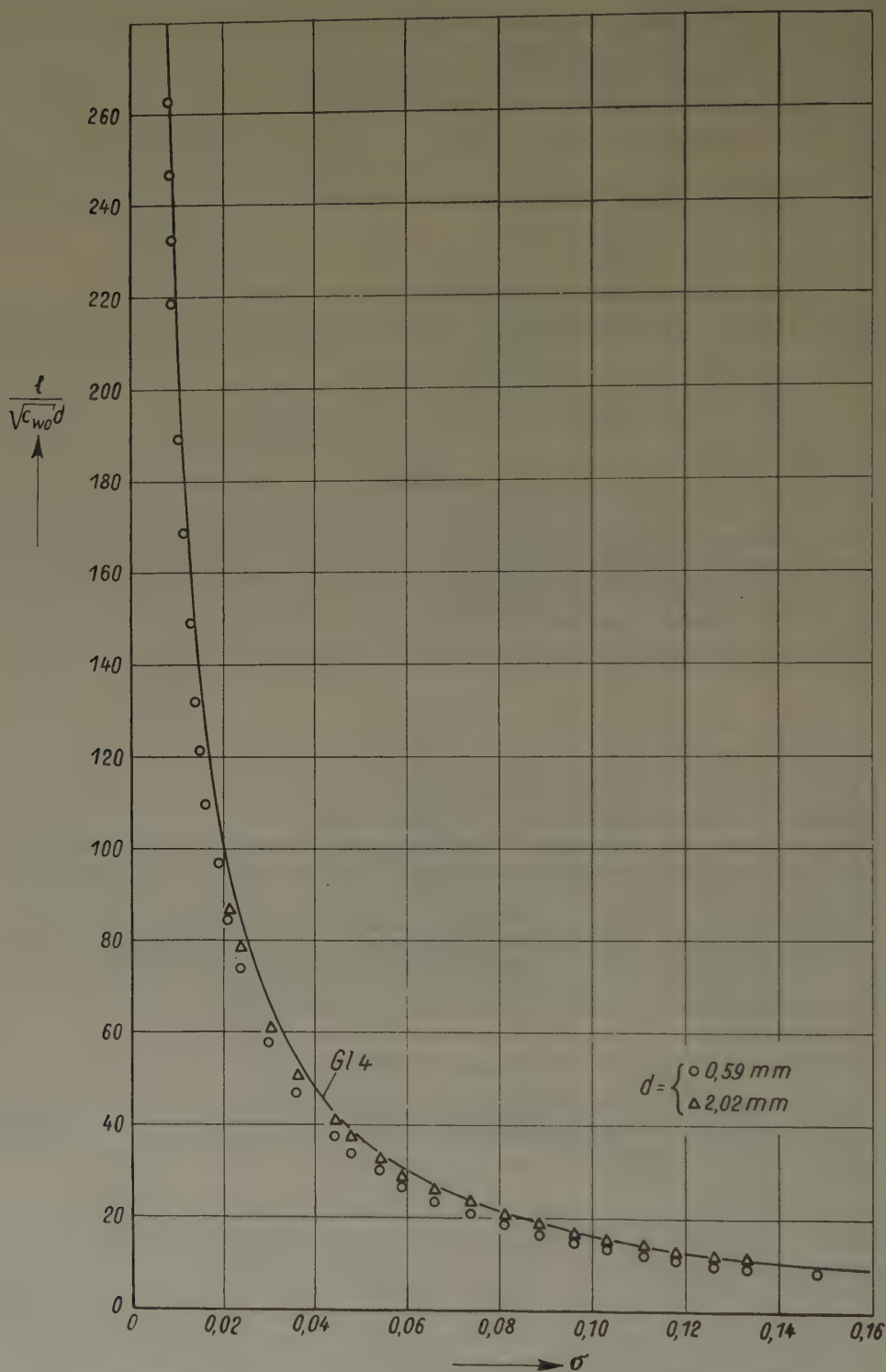


Bild 1. Eichkurve zur Bestimmung der örtlichen Kavitationszahl aus einer gemessenen Blasenlänge

Um ein örtlich veränderliches Druckfeld ausmessen zu können, muß die Kavitationsblase hinreichend klein sein. Kleine Blasen erfordern aber auch einen geringen Zylinderdurchmesser. Wir benutzten daher als Sonde einen dünnen Draht ($d = 0,6 \text{ mm}$). Die Blasenlängen wurden mit einem Ablesefernrohr gemessen,

Wenn man aus einer Blasenlängenmessung mit Hilfe der Eichkurve $l(\sigma)$ den örtlichen Wert σ bestimmt hat, so kann man mittels der Definitionsgleichung (1) den örtlichen statischen Druck berechnen, wenn der Hohlraumdruck p_k und der Staudruck q bekannt sind. Der Hohlraumdruck, der praktisch gleich dem Dampfdruck ist, läßt sich sehr genau feststellen. Der Staudruck wird normalerweise mit einem Staurohr bestimmt. Das Staurohr mißt unmittelbar den Gesamtdruck

$$\bar{p}_q = p + q \quad \dots \quad (2),$$

und zwar mit hoher Genauigkeit.

Durch Elimination von q aus (1) und (2) erhält man für p :

$$p = \frac{\sigma p_q + p_k}{1 + \sigma} \quad \dots \quad (3).$$

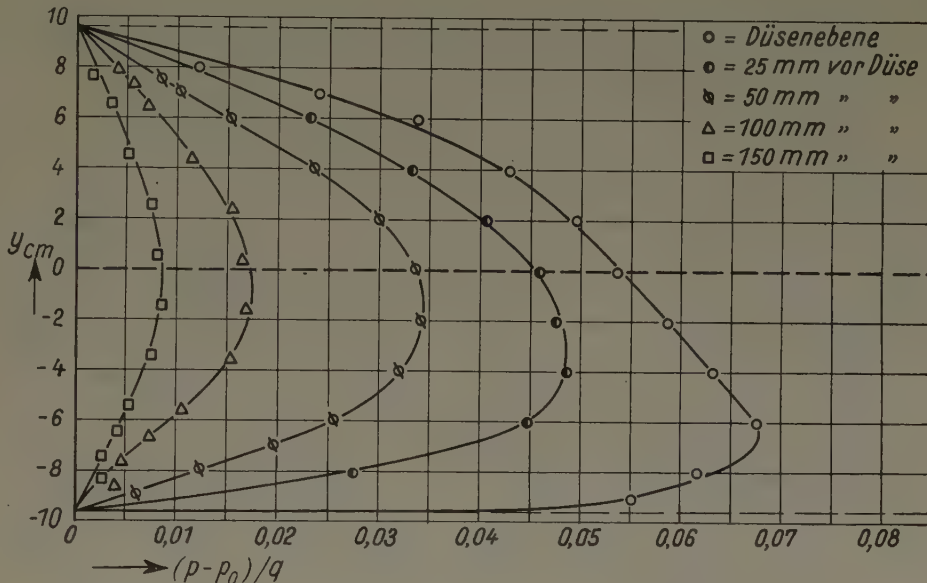


Bild 2. Druckverlauf in einem Wasserfreistrahlfür verschiedene Abstände von der Düsenebene

In dieser Gleichung wird der örtliche statische Druck durch die örtliche Kavitationszahl und die unmittelbar und hinreichend genau meßbaren Drücke p_q und p_k ausgedrückt. Die in der Eichströmung gemessenen Blasenlängen sind in Bild 1 in Abhängigkeit von den gemessenen σ -Werten aufgetragen. In Anlehnung an eine frühere Untersuchung haben wir die Blasenlängen auf $\sqrt{c_{w0}} d$ bezogen (d = Durchmesser der Stirnfläche der Sonde, $c_{w0} = 0,81$ = Widerstandsbeiwert der Stirnfläche (Kreisscheibe) bei $\sigma \rightarrow 0$). Zum Vergleich ist noch die Funktion

$$\frac{l}{\sqrt{c_{w0}} d} = \frac{\sigma + 0,008}{(1,70 \sigma + 0,066) \sigma^{1,5}} \sqrt{\frac{1 + \sigma}{1 - 0,132 \sigma^{1/7}}} \quad \dots \quad (4)$$

in Bild 1 eingezeichnet. Diese Beziehung folgt aus Formeln, die einer früheren Arbeit [2] entnommen sind, in der u. a. das Achsenverhältnis der Kavitationsblasen aus potentialtheoretischen Ansätzen (Quellsenkenmethode) berechnet worden war. Wie man aus der Lage der kreisförmigen Meßpunkte ersieht, sind die gemessenen Blasenlängen etwas geringer als die nach der Formel (4) berechneten Längen. Die prozentuale Abweichung ist vor allem bei den kürzeren Blasen auffällig.

Für diese Abweichung gibt es eine plausible Erklärung. Der zylindrische Sondenkörper stellt für das hintere Ende der Blase eine Störung dar. Durch die Ausbildung einer Reibungsschicht am Blasenende wird die Strömungsgeschwindigkeit herabgesetzt, der Druck erhöht und die Blase verkürzt. Der Einfluß des relativ dicken „Stieles“ der Sonde auf das Blasenende ist um so größer, je kürzer die Blase ist.

Versuche mit einer Kreisscheibe von 2 mm Durchmesser, die an einem 1,5 mm starken Draht gehalten war, führten zu etwas größeren relativen Blasenlängen $l/\sqrt{c_{w0}} d$ (siehe die dreieckigen Zeichen in Bild 1). Hier liegen die Meßpunkte zum Teil auf der durch Gl. (4) dargestellten Kurve. Eine Kreisscheibe von 2 mm Durchmesser ist aber weniger für Meßzwecke geeignet, da sie wesentlich dickere und längere Blasen hervorruft als die Sonde von 0,6 mm Stärke.

Zur Erprobung der Sonde haben wir in der vertikalen Mittelebene des Freistrahls unserer Kavitationsanlage von $h = 200$ mm Höhe und 150 mm Breite Blasenlängenmessungen durch-

geführt. Aus der Eichkurve (Bild 1) wurden die den gemessenen Blasenlängen zugehörigen Werte der Kavitationszahlen abgelesen und mit diesen σ -Werten die dimensionslose Druckzahl $(p - p_0)/q$ berechnet. Die so ermittelten Druckzahlen sind in Bild 2 und 3 dargestellt. Man sieht dort die über der Höhenkoordinate y aufgetragenen Druckwerte für verschiedene Abstände x von der Düsenebene.

Mit wachsender Entfernung von der Düse nehmen die Drucke rasch ab. Dabei verschiebt sich das Druckmaximum allmählich zur Strahlmitte. Die in größeren Entfernungen von der Düse gemessenen Druckverteilungen sind in Bild 3 in größerem Maßstabe dargestellt. Wie man sieht, beträgt der Überdruck in Strahlmitte bei $x = h = 200$ mm noch 3‰ des Staudrucks. Bei $x = 1,5 h = 300$ mm ist die Promillegrenze erreicht. Wenn wir die Promillegenauigkeit als ausreichend ansehen, so dürfen wir also sagen, daß bei dem gewählten Staudruck in Abständen $x = 1,5 h$ an allen Stellen des Freistrahls der Außendruck p_0 herrscht.

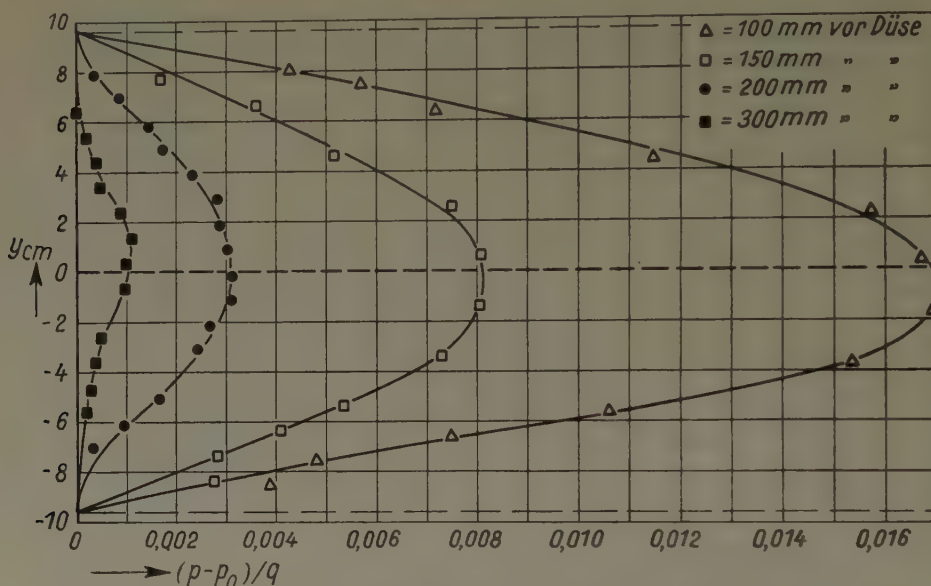


Bild 3. Druckverlauf in einem Wasserfreistrah für verschiedene Abstände von der Düsenebene

Diese Messungen wurden möglich, da bei dem Blasenmeßverfahren eine Druckempfindlichkeit von etwa $0,1\text{‰}$ erreicht werden kann. Eine genauere Darstellung wird demnächst in [3] veröffentlicht.

Literatur

- [1] H. REICHARDT, Über Kavitationsanlagen für kleine Kavitationszahlen, Deutsche Luftfahrtforschung, UM 6620 (1945).
- [2] H. REICHARDT, Gesetzmäßigkeiten der Kavitationsblasen an umströmten Rotationskörpern, Deutsche Luftfahrtforschung, UM 6628 (1945).
- [3] H. REICHARDT und W. SATTLER, Ermittlung schwacher Druckdifferenzen in Strömungen mit Kavitation, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. W. TOLLMIE (im Druck).

Anschrift: Dr. H. REICHARDT und Dipl.-Phys. W. SATTLER, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Böttingerstr. 6—8.

Zur Stabilitätstheorie axialsymmetrischer Parallelströmungen

Von H. SCHADE

Als Parallelströmung werde eine Strömung bezeichnet, deren Stromlinien parallele Geraden sind; sie läßt sich in kartesischen Koordinaten in der Form $c = \{0, 0, w(x, y)\}$ darstellen. Ist speziell $w = w(x)$ bzw. $w = w(x^2 + y^2)$, so werde sie als ebene bzw. axialsymmetrische Parallelströmung bezeichnet. Gegenstand der folgenden Ausführungen ist die Frage, wie weit sich die für ebene Parallelströmungen entwickelte linearisierte Stabilitätstheorie auf axialsymmetrische Parallelströmungen übertragen läßt.

1. Zum physikalischen Mechanismus der Instabilität

Der Umschlag zur Turbulenz hat bekanntlich zur Voraussetzung, daß eine Laminarströmung gegenüber den darin auftretenden Störungen labil wird. Die Möglichkeit, daß endliche Störungen von außen in die Laminarströmung hereingetragen werden, etwa durch den Turbulenzgrad eines Windkanals, soll hier außer acht bleiben; dann gibt es nach unserer heutigen Kenntnis drei Mechanismen, wodurch die stets vorhandenen infinitesimalen Störungen angefacht werden können. In einer reibungslosen Strömung existieren zwei Gleichgewichte, die labil werden können: das Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und radialem Druckgradienten an gekrümmten Stromlinien und das Gleichgewicht der von verschiedenen Punkten herrührenden Induktionswirkungen. In einer realen Flüssigkeit wirkt die Zähigkeit auf beide Arten reibungsloser Instabilität dämpfend, d. h. mit zunehmender Zähigkeit wird der instabile Bereich kleiner. Daneben tritt in einer realen Flüssigkeit aber noch ein dritter Instabilitätsmechanismus auf, indem die Energie der in der Wandgrenzschicht abgebremsten Teilchen anfachend auf Störungen in der freien Strömung wirken kann. Geht die Instabilität bei einer Strömung zu Lasten des Zentrifugalgleichgewichts, so spricht man von TAYLOR-GÖRTLER-Instabilität, geht sie zu Lasten eines der



Bild 1: reine Induktionsinstabilität

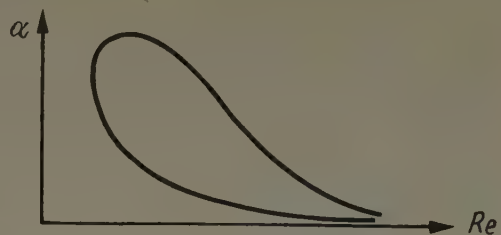


Bild 2: reine Reibungsinstabilität

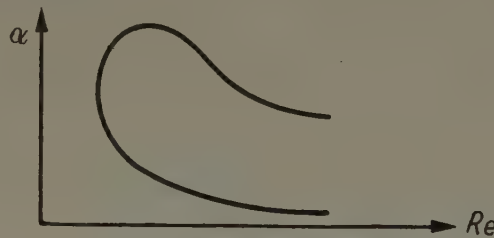


Bild 3: Zusammenwirken beider

Bilder 1—3. Typischer Verlauf von neutralen Kurven

beiden übrigen Mechanismen, so spricht man von TOLLMEN-SCHLICHTING-Instabilität. Die Parallelströmungen, und zwar die ebenen wie die axialsymmetrischen, sind nun dadurch gekennzeichnet, daß darin nur TOLLMEN-SCHLICHTING-Instabilität auftreten kann, weil die Stromlinien ja definitionsgemäß nicht gekrümmt sind. Die Instabilität, die in einem ebenen Freistrahle auftritt, ist ein Beispiel für eine reine Induktionsinstabilität; die neutrale Kurve verläuft bekanntlich wie in Bild 1 skizziert: Es gibt einen bestimmten Wellenlängenbereich, der reibungslos gegenüber dem Induktionsgleichgewicht instabil ist, und mit zunehmender Reibung wird dieser Bereich kleiner, bis er schließlich verschwindet. Die Instabilität in der Plattengrenzschicht ist ein Beispiel für eine reine Reibungsinstabilität; die neutrale Kurve verläuft bekanntlich wie in Bild 2 angegeben: Die Strömung ist gegenüber dem Induktionsgleichgewicht stabil; mit wachsender Reibung überwiegt zunächst der anfachende Einfluß der Wandschubspannung über die Dämpfung durch Energiedissipation, bis sich bei genügend großer Zähigkeit das Verhältnis umkehrt. Die Grenzschicht mit Druckanstieg schließlich, wo die neutrale Kurve bekanntlich wie in Bild 3 dargestellt verläuft, ist ein Beispiel, wo sich die beiden Mechanismen überlagern.

2. Theoretische Besonderheiten bei axialsymmetrischen Parallelströmungen

Das Hauptproblem bei der theoretischen Behandlung axialsymmetrischer Parallelströmungen ist, ob es hier ein Analogon des Satzes von SQUIRE [1] gibt, d. h. ob es zulässig ist, sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf zweidimensionale Störungen zu beschränken. LIN [2] hat gezeigt, daß man sich im ebenen Fall deshalb auf ebene Störungen beschränken darf, weil eine dreidimensionale Störung physikalisch auch nichts anders darstellt als eine zweidimensionale, nämlich eine ebene Welle, so daß beide Schreibweisen durch eine einfache Drehung des Koordinatensystems ineinander überführt werden können. Das ist nun für axialsymmetrische Strömungen sicher nicht möglich, und deshalb kann man nicht erwarten, daß es ein Analogon des Satzes von SQUIRE gibt. Andererseits zeigen aber sowohl die Experimente von LEITE [3] über Störungen der

HAGEN-POISEUILLE-Strömung als auch Versuche in unserem Institut [4] über den Zerfall einer ins Freie austretenden runden Düsegrenzschicht, daß in diesen beiden Fällen doch axialsymmetrische Störungen den Umschlag herbeiführen. Nun ist eine axialsymmetrische Störung ja die nullte FOURIER-Komponente einer allgemeinen Störung; der Ausweg bietet sich also an, daß womöglich in einigen Fällen die nullte, in andern Fällen hier aber auch eine höhere FOURIER-Komponente für die Instabilität verantwortlich ist.

Da man sich im ebenen Fall nach dem Satz von SQUIRE auf ebene Störungen beschränken darf, läßt sich das System der Störungsdifferentialgleichungen dann auf die bekannte ORR-SOMMERFELD-Gleichung reduzieren. Wenn man sich im axialsymmetrischen Fall entsprechend auf axialsymmetrische Störungen beschränkt, dann erhält man analog eine andere Differentialgleichung, die zuerst von PRETSCH [5] angegeben wurde. Es hat sich gezeigt, daß sich diese Gleichung in sehr weitgehender Analogie zur ORR-SOMMERFELD-Gleichung behandeln läßt: Es existieren dafür dieselben asymptotischen Näherungsverfahren, wie sie HEISENBERG [6] und TOLLMIE [7] für ebene Strömungen verwendet haben. Diese Näherungsverfahren hängen in derselben Weise zusammen, wie LIN [2] das für ebene Strömungen gezeigt hat. Es besteht derselbe Zusammenhang zwischen der Anzahl der auftretenden Reibungslösungen und der Anzahl der festen Wände einer Strömung, auf den FOOTE und LIN [8] hingewiesen haben. Es gilt derselbe Satz über die Existenz einer kritischen Schicht, wie ihn TOLLMIE [9] gefunden hat. Vor allem aber lassen sich, wenn auch mit gewissen Modifikationen, die bekannten zwei RAYLEIGHschen und zwei TOLLMIEschen Sätze für verschwindende Zähigkeit auf axialsymmetrische Strömungen übertragen. Auch der von LIN [2] gegebene elementar-anschauliche Beweis des 1. RAYLEIGHschen Satzes, des sogenannten Wendepunktskriteriums, der von der Vorstellung einer Störung des Induktionsgleichgewichts ausgeht, läßt sich übertragen. Damit wird auf neue die These gestützt, daß die reibungslose TOLLMIE-SCHLICHTING-Instabilität auf eine Störung des Induktionsgleichgewichts zurückgeht. Gleichzeitig wird damit auch plausibel, daß das Vorhandensein eines Wendepunkts im Geschwindigkeitsprofil nur bei ebenen Strömungen für die Stabilität von Belang ist.

Alle diese Aussagen gelten aber nur, wenn die Instabilität einer axialsymmetrischen Strömung durch Anfachung axialsymmetrischer Störungen hervorgerufen wird. Wird eine andere FOURIER-Komponente der Störung stärker angefacht als die nullte, so versagt die Analogie zu den ebenen Strömungen. Prinzipiell ließe sich zwar auch für jede höhere FOURIER-Komponente ein Analogon zur ORR-SOMMERFELD-Gleichung hinschreiben, aber diese Gleichungen sind nicht nur von sechster statt von vierter Ordnung, sondern sie sind auch noch so hoffnungslos kompliziert, daß man sie mit vertretbarem Aufwand nicht einmal aufstellen, geschweige denn lösen kann. Daß diese Differentialgleichungen von sechster Ordnung sein müssen, ist auch physikalisch einzusehen: Man betrachte zur Fixierung der Vorstellung eine Strömung zwischen zwei festen Wänden, die Ebenen oder konzentrische Zylinder sein können. Für eine ebene oder axialsymmetrische Störung muß man dann an jeder Wand das Verschwinden von zwei Geschwindigkeitskomponenten fordern, um das Axiom der Wandhaftung zu erfüllen. Insgesamt hat man also vier Randbedingungen zu befriedigen, und von daher ist plausibel, daß die Störungsdifferentialgleichungen für ebene und axialsymmetrische Störungen von vierter Ordnung sind. Für eine höhere FOURIER-Komponente muß man an jeder Wand das Verschwinden von drei Geschwindigkeitskomponenten fordern, und darum ist es plausibel, daß die zugehörige Störungsdifferentialgleichung von sechster Ordnung ist. Immerhin ließen sich über die Lösungen dieser Gleichungen sechster Ordnung zwei Sätze beweisen: einmal daß für Strömungen, die die Symmetrieachse einschließen, die siebente und alle höheren FOURIER-Komponenten der Störung identisch verschwinden, zum andern daß Störungen, deren Radialkomponente überall verschwindet, stets gedämpft sind. Das ist auch physikalisch einsichtig, da Anfachung ja nur dadurch zustande kommen kann, daß Energie von der Hauptströmung auf die Störströmung übertragen wird, und dazu muß eine Radialkomponente der Geschwindigkeit existieren.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Daß die axialsymmetrischen Störungsanteile in einer axialsymmetrischen Parallelströmung zuerst labil werden, ist weder analog zum ebenen Fall zu beweisen noch generell auszuschließen. Sind höhere FOURIER-Komponenten stärker instabil, so läßt sich die Stabilität der Strömung nicht analog zum ebenen Fall untersuchen. Man müßte einen grundsätzlich andern Weg beschreiten, könnte etwa versuchen, mit Hilfe des Matrizenkalküls das Differentialgleichungssystem direkt zu lösen. Sind dagegen axialsymmetrische Störungen am meisten instabil, so kann man bei etwas größerem Rechenaufwand wie bei ebenen Parallelströmungen vorgehen, und die dazu nötigen Formeln stehen nunmehr bereit.

Literatur

- [1] H. B. SQUIRE, On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, *Proc. Roy. Soc. A* **142** (1933), p. 621—628.
- [2] C. C. LIN, On the stability of two-dimensional parallel flows, *Quart. Appl. Math.* **3** (1945), p. 117—142, 218—234, 277—301.

- [3] R. J. LEITE, An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow, J. Fluid Mech. 5 (1959), p. 81—96.
- [4] O. WEHRMANN, R. WILLE, Beitrag zur Phänomenologie des laminar-turbulenten Übergangs im Freistrahle bei kleinen Reynoldszahlen, S. 387—404 in: Grenzschichtforschung, hrg. v. H. GÖRTLER, Berlin 1958, Springer-Verlag.
- [5] J. PRETSCH, Über die Stabilität einer Laminarströmung in einem geraden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt, ZAMM 21 (1941), S. 204—217.
- [6] W. HEISENBERG, Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen, Ann. Phys. (4) 74 (1924), S. 577 bis 624.
- [7] W. TOLLMIEH, Über die Entstehung der Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1929), S. 18—21.
- [8] J. R. FOOTE, C. C. LIN, Some recent investigations in the theory of hydrodynamic stability, Quart. Appl. Math. 8 (1950), p. 265—280.
- [9] W. TOLLMIEH, Göttinger Monographie über Grenzschichten, Teil B 3.

Anschritt: Dipl.-Ing. H. SCHADE, Institut für Turbulenzforschung der DVL, Berlin-Charlottenburg 2, Garten-ufer 8

Über die Strömung visko-plastischer Stoffe bei veränderlichen Stoffkennzahlen

Von A. SLIBAR

Für den mehrdimensionalen Verformungsfall stellen die von W. PRAGER und K. HOHENEMSER [1] angegebenen Fließkriterien

$$\left. \begin{aligned} d_{ij} &= 0 & \text{für } \sqrt{J_2} < \tau_0 \\ d_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\sqrt{J_2} - \tau_0}{\sqrt{J_2}} \cdot S_{ij} & \text{für } \sqrt{J_2} \geq \tau_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

den Zusammenhang zwischen den Deformationsgeschwindigkeiten d_{ij} und den reduzierten Spannungen S_{ij} unter Verwendung der Viskositätszahl μ und des kritischen Grenzwerts τ_0 der zweiten Invarianten J_2 des Spannungsdeviators her. In den bisher mit Benützung dieser Gesetze behandelten Strömungsproblemen [2] wurde angenommen, daß die in den Gleichungen (1) verwendeten Stoffparameter, d. h. die Viskositätszahl μ und der kritische Grenzwert τ_0 konstant seien.

Neuere Messungen und industrielle Erfahrung haben gezeigt, daß diese Annahme bei der analytischen Behandlung verschiedener technischer Probleme nicht aufrecht erhalten werden kann. Es ist bekannt, daß viele idealisiert durch die Fließkriterien (1) dargestellten Stoffe einen von der kubischen Dilatation abhängigen Viskositätsparameter μ besitzen und daß weiters eine große Gruppe von BINGHAM-Plastiken im Gleichgewichtszustand die Erscheinung des „Erstarrens“ oder „Stockens“ zeigt. Diese zweite Erscheinung ist bei allen intermittierenden technischen Vorgängen von wesentlicher Bedeutung.

Zur analytischen Behandlung der „verzögerten Strömung“ (retarded flow) in einem die Erstarrungseigenschaft aufweisenden Stoff wurden von A. SLIBAR und P. R. PASLAY [3] zur Ergänzung der für den bereits eingetretenen Fließzustand gültigen Kriterien (1) für den aus dem Gleichgewichtszustand heraus erfolgenden Deformationsfall — unter Verwendung eines weiteren Stoffparameters τ_1 — die Fließgesetze

$$\left. \begin{aligned} d_{ij} &= 0 & \text{für } \sqrt{J_2} < \tau_1 \\ d_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \frac{\sqrt{J_2} - \tau_1}{\sqrt{J_2}} \cdot S_{ij} & \text{für } \sqrt{J_2} \geq \tau_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

vorgeschlagen und zur Lösung technisch wichtiger Probleme herangezogen. Die gemeinsame Verwendung der Kriterien (1) und (2) für den vollständigen Belastungszyklus an einem visko-plastischen Stoff führt zu einem von der Belastungsgeschichte abhängigen Zusammenhang zwischen Last und Deformationsgeschwindigkeit. Der vollständige Belastungs- und Entlastungszyklus für einen die Erstarrungseigenschaft zeigenden visko-plastischen Stoff wird an

- a) der Strömung zwischen ebenen Platten,
- b) der axialen Strömung im konzentrischen Rohr,
- c) der Tangentialströmung zwischen konzentrischen Zylindern gezeigt und nach dimensionsloser Darstellung im Diagramm diskutiert.

Literatur

- [1] W. PRAGER und K. HOHENEMSER. Über die Ansätze der Mechanik der Kontinua, ZAMM 12 (1932), S. 216 bis 226.
 [2] J. G. OLDROYD. Two-Dimensional Plastic Flow of a Bingham Solid. Proc. Cambr. Phil. Soc 43 (1947), p. 383—395.
 J. G. OLDROYD, Rectangular Plastic Flow of a Bingham Solid I and II, Cambr. Phil. Soc. 43 (1947), p. 396—405, 521—532.
 P. R. PASLAY und A. SLIBAR, On the Theory of Grease Lubricated Thrust Bearings, Trans. ASME 79 (1957), p. 1229—1234.
 A. SLIBAR und P. R. PASLAY, Die axiale Strömung von Bingham Plastiken in konzentrischen Rohren, ZAMM 37 (1957), S. 441—449.
 [3] A. SLIBAR und P. R. PASLAY, Retarded Flow of Bingham Materials, Trans ASME 26 (1959), p. 107—113.

Anschrift: Prof. Dr. A. SLIBAR, Techn. Hochschule Stuttgart, Stuttgart N, Keplerstr. 11

Zur Berechnung ebener Flatterluftkräfte mittels Charakteristikenverfahren

VON INGOLF TEIPEL

Ebenso wie man die stationäre Überschallströmung, kleine Störungen vorausgesetzt, durch die Singularitätenmethode oder durch das Charakteristikenverfahren berechnen kann, genau so kann man auch bei der ebenen Überschallströmung um ein schwingendes Profil vorgehen. Die Singularitätenmethode wurde u. a. von GARRICK und RUBINOW [1] zur Berechnung der Flatterluftkräfte angewendet. Hier soll ein Charakteristikenverfahren für diesen Problemkreis entwickelt werden. Es soll dabei vorausgesetzt werden, daß man das Gleichungssystem von Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung linearisieren kann. Die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten in x - und y -Richtung und des Druckes ist durch folgende Ansätze gegeben:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty} = U(x, y) e^{i\omega t},$$

$$\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty} = V(x, y) e^{i\omega t},$$

$$\frac{2}{\kappa - 1} \frac{1}{M_\infty^2} \frac{c - c_\infty}{c_\infty} = C(x, y) e^{i\omega t}.$$

(ω Frequenz, M_∞ Anström-MACH-Zahl, $\kappa = c_p/c_v$)

Geht man damit in das oben genannte Gleichungssystem ein, und wendet darauf die Charakteristikentheorie an, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\text{str}} &= 0, & \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\xi, \eta} &= \pm \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}, & (\text{Richtungsbedingungen}) \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\text{str}} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_{\text{str}} + i \frac{\omega}{u_\infty} U &= 0, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{\xi, \eta} \mp \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{\xi, \eta} + i \frac{\omega}{u_\infty} \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} (U - C) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Verträglichkeitsbedingungen})$$

$\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$ bedeuten die MACH-Linien. Die Aufgabe besteht nun darin, die Verträglichkeitsbedingungen schrittweise entlang den vorgegebenen Richtungen zu integrieren. Da U , V und C sich aus Real- und Imaginärteil zusammensetzen, hat man 6 lineare Gleichungen simultan zu lösen. Die Rechnung erfolgte mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine.

Mit diesem Verfahren wurden die Luftkräfte einer Platte berechnet, die Schlag- und Dreh-schwingungen ausführt. Als weitere Randbedingungen wurden die ersten beiden Schwingungsformen des frei lagernden Balkens vorgegeben. Die Rechnung wurde für mehrere MACH-Zahlen bei verschiedenen reduzierten Frequenzen durchgeführt.

Bei der Gegenüberstellung der Luftkräfte bei der Schlagschwingung und bei der Grundschwingung des frei lagernden Balkens sieht man, daß im zweiten Fall ausgeprägtere Extremwerte auftreten. Die gleiche Feststellung macht man auch, wenn man den Druckverlauf bei einer bestimmten MACH-Zahl und bei einer gegebenen Frequenz vergleicht.

Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst in der Zeitschrift für Flugwissenschaften.

Literatur

- [1] GARRICK und RUBINOW, NACA Report No. 846 (1946).

Anschrift: Dr.-Ing. I. TEIPEL, Institut für theoretische Gasdynamik der DVL, Aachen, Theaterstr. 13

Berechnung von Charakteristiken allgemeiner Kontinua

Von C. TORRE

Zur Berechnung des „hyperbolischen“ Verhaltens allgemeiner Kontinua im drei-dimensionalen Raum werden wir hier die Hodographgleichung (G -Raum)

$$f(\mathbf{v}) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

und drei Gleichungen des Wirbelvektors im physikalischen (P -)Raum

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \vec{w}(x, y, z) \quad \dots \dots \dots (2)$$

heranziehen. In Gl. (2) ist \vec{w} eine bekannte Ortsfunktion und $\mathbf{v} = i v_x + j v_y + k v_z$.

Der Einsvektor der Normale zur Fläche Gl. (1), wenn $v_z = v_z(v_x, v_y)$, lautet

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{g_1}} \left(i \frac{\partial v_z}{\partial v_x} + j \frac{\partial v_z}{\partial v_y} - k \right), \quad g_1 = 1 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial v_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial v_y} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (3),$$

wobei $n_1 = i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma$, so daß $\cos \alpha = (\partial v_z / \partial v_x) / \sqrt{g_1}$, usw. Ähnlich lautet der Einsvektor der Normale zur Fläche $z = z(x, y)$ im P -Raum

$$n = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(i \frac{\partial z}{\partial x} + j \frac{\partial z}{\partial y} - k \right), \quad g = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (4).$$

Dabei ist $n = i \cos \xi + j \cos \eta + k \cos \zeta$, so daß $\cos \xi = (\partial z / \partial x) / \sqrt{g}$, usw.

Multipliziert man Gl. (2) vektoriell von rechts mit $(\times n_1)$, dann ergibt sich nach dem Entwicklungssatz ([1], S. 33), ohne „1/2“,

$$\nabla \times \mathbf{v} \times n_1 = (\nabla \cdot n_1) \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_1 = \vec{w} \times n_1 \quad \dots \dots \dots (5).$$

Da $\nabla \cdot \mathbf{v}$ eine spezielle Funktion der Gl. (1) ist, so folgt $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ [2]. Hiermit ergibt sich in Vektorform eine hyperbolische partielle quasi-lineare Differentialgleichung erster Ordnung [2], mit $\nabla \mathbf{v} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}$, $\mathbf{r} = i x + j y + k z$,

$$n_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} - \vec{w} \times n_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (6).$$

Aus Gl. (6) ergeben sich die Differentialgleichungen für die charakteristischen Richtungen (S = Bogenlänge im P -Raum)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dS} = n_1, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dS} = \vec{w} \times n_1 \quad \dots \dots \dots (7).$$

Gl. (7/1) ergibt, daß die Richtungskosinusse im P -Raum eines in der Tangentialebene der Fläche $z = z(x, y)$ liegenden (MONGESchen) Vektors aus Richtungselementen der Normale n_1 im G -Raum bestehen; so folgt, daß die Normalen zu den Flächen $z = z(x, y)$ und $v_z = v_z(v_x, v_y)$ zueinander senkrecht stehen. Diese Orthogonalitätsbedingung ergibt sich aus Gl. (3) und (4) zu:

$$n_1 \cdot n = 0 \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial v_x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial v_y} = 0 \quad \dots \dots \dots (8).$$

Im Falle der ebenen Überschallströmung geht Gl. (8) in die PRANDTL-BUSEMANNSche Gleichung über ($z \equiv y$)

$$1 + y' v'_y = 0 \quad \text{oder} \quad dy/dx = -dv_x/dv_y \quad \dots \dots \dots (9).$$

Gl. (8) und (9) gelten auch für den Fall, wenn Massenkräfte vorhanden sind¹⁾.

Gl. (6) wird von rechts mit n_1 skalar multipliziert

$$n_1 \cdot (\nabla \mathbf{v}) \cdot n_1 - (\vec{w} \times n_1) \cdot n_1 = 0 \quad \dots \dots \dots (10).$$

Wegen $\vec{w} \times n_1 = \dot{n}_1$ ist $\dot{n}_1 \cdot n_1 = 0$. Die Dyade $(\nabla \mathbf{v})$ wird wie folgt zerlegt

$$\nabla \mathbf{v} = \mathfrak{Z} + \Omega \quad \dots \dots \dots (11),$$

wobei $\mathfrak{Z} = i i \varepsilon_x + \dots + 1/2 (i j + j i) \dot{\gamma}_{xy} + \dots$ der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten und $\Omega = 1/2 (i j - j i) \dot{\gamma}_{xy} + \dots$ der Drehungstensor ist. Weil $n_1 \cdot \Omega \cdot n_1 \equiv 0$, so bleibt nur $n_1 \cdot \mathfrak{Z} \cdot n_1 = 0$ übrig, womit sich nach Gl. (7/1) im P -Raum ein elementarer Richtungskegel ergibt

$$d\mathbf{r} \cdot \mathfrak{Z} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \dots \dots \dots (12).$$

¹⁾ Eine Umformung der Gl. (22/17) von [7], S. 43, ergibt, daß ähnliche Diff.Gl. für P - und G -Ebene gelten: $\partial^2 f_i / \partial \alpha \partial \beta = 0$, $f_i = x, y, v_x, v_y$, obwohl $E_i(x, y, v_x, v_y) \neq 0$, $i = 1, 2$.

Die Abmessungen dieses Kegels hängen von Verzerrungsgeschwindigkeiten ab. Andererseits wegen $dr \neq 0$ ergibt sich nach Gl. (12), daß sich der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten in charakteristischen Flächen zeitlich nicht ändert

$$\mathfrak{B}_e = 0 \quad \dots \dots \dots (13).$$

Gl. (13) für den ebenen Fall findet sich bereits bei GEIRINGER [3]. Aus dieser Gleichung folgt, daß auch der Verzerrungstensor in charakteristischen Flächen gleich Null ist (z. B. $\dot{\epsilon}_x = \partial v_x / \partial x = 0$; $v_x = \partial u / \partial t = f(t)$, $u = F(t)$; dann $\epsilon_x = \partial u / \partial x = 0$)

$$\mathfrak{B}_e = 0 \quad \dots \dots \dots (14).$$

Mit $\epsilon_e = 0$ hat NADAI ([4], S. 321) den Gleitwinkel eines flachen Zugstabes ermittelt.

Die Verzerrungsflächen $2F = dr \cdot \mathfrak{B} \cdot dr = \text{konstant}$ entsprechen nach Gl. (14) den elementaren Richtungskegeln $\epsilon_x dx^2 + \dots \gamma_{xy} dx dy + \dots = 0$, die in Hauptrichtungen (1, 2, 3) lauten

$$\frac{dx_1^2}{(\sqrt{-\epsilon_3/\epsilon_1})^2} + \frac{dx_2^2}{(\sqrt{-\epsilon_3/\epsilon_2})^2} - dx_3^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (15).$$

Dieser Kegel trennt ein Gebiet, in dem alle Verzerrungen positiv sind von einem mit negativen Verzerrungen ([1], S. 248). Der Kegel wird reell, wenn die Verzerrungsflächen $2F = \text{konstant}$ Hyperboloide sind. Der elliptische Querschnitt des Kegels besagt, daß die MACHSchen Zahlen mit der Richtung veränderlich sind.

Wenn Gl. (13) auf ein dissipatives Kontinuum angewendet wird, für das STOKESsche Beziehungen gelten

$$\mathfrak{S} = 2\mu \mathfrak{B} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v}\right) \mathbf{J} \quad \dots \dots \dots (16),$$

dann ergibt sich, daß die charakteristischen Flächen reibungsfrei sind, so daß in diesen Richtungen nur der mittlere Druck herrscht

$$(\tau_{ik})_e = 0, \quad \sigma_{1e} = \sigma_{2e} = \sigma_{3e} = -p \quad \dots \dots \dots (17).$$

Gl. (17) entsprechen den gasdynamischen Gleichungen, die für ein ideales reibungsfreies Medium aufgestellt sind.

Die Parallelverschiebung des Geschwindigkeitsvektors v_i im RIEMANNschen Raum R_3 ergibt sich nach Gl. (13) aus $\dot{\epsilon}_e = \mathfrak{D} v_i / \mathfrak{D} x_i = 0$ bzw. ([5], S. 271)

$$(\mathfrak{D} v_i)_e = \left(dv_i - \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} v_k dx_j \right)_e = 0 \quad \dots \dots \dots (18).$$

Da v_i im G -Raum R_3 ein Ortsvektor ist, so weist er auf einen einzigen Punkt mit einem charakteristischen Kegel hin. Im P -Raum R_3 ergibt sich hiermit und nach Gl. (18), daß alle charakteristischen Flächen Ebenen sind, so daß alle physikalischen und kinematischen Zustände den „homogenen“ Zuständen entsprechen.

Aus Gl. (7) nach Eliminierung von ω_z und Berechnung von vollständigen Differentialen dv_x und dv_y als Funktionen von x, y, z ergeben sich die Grundcharakteristiken in der (x, y) -Ebene in Hauptrichtungen (1, 2, 3), wo $\dot{\gamma}_{xy} = \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0$, zu

$$dy/dx = \pm \sqrt{-\dot{\epsilon}_1/\dot{\epsilon}_3} \quad \dots \dots \dots (19).$$

Gl. (19) ist von der mittleren Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_2$ ($\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_2 > \dot{\epsilon}_3$) unabhängig. Für den ebenen Fall kann man nach Gl. (9) und (19) fünf Abbildungsgesetze angeben (der letzte Ausdruck nach [6])

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_3} = -\frac{d\epsilon_1}{d\epsilon_3} = \left(\frac{dv_x}{dv_y}\right)^2 = \frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} \quad \dots \dots \dots (20).$$

Gl. (20) ergibt die Abbildungsgesetze der fünf charakteristischen Funktionen

$$y = y(x), \quad \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_1(\dot{\epsilon}_3), \quad \epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon_3), \quad v_y = v_y(v_x), \quad \sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3) \quad \dots \dots \dots (21).$$

Das sind der Reihe nach P -, \dot{V} -, V -, G - und S -Ebenen.

Gl. (20/2, 3, 5) sind in Bild 1 und Gl. (20/1, 4, 5) in Bild 2 dargestellt. Das Abbildungsgesetz S auf V und umgekehrt erfolgt nach den reziprok-konjugierten Tangenten, während V auf \dot{V} und umgekehrt nach den zu den Tangenten von $\epsilon_1(\epsilon_3)$ parallelen Radiusvektoren von $\dot{\epsilon}_1(\dot{\epsilon}_3)$. In Bild 2 fallen die Gleit- bzw. MACHSchen Winkel 2α der $y(x)$ -Kurve mit dem geometrischen Ort der $\sigma_1(\sigma_3)$ -Kurve zusammen. Das Abbildungsgesetz von P auf G und umgekehrt erfolgt nach der

Orthogonalitätsbedingung Gl. (9). Die $\sigma_1(\sigma_3)$ -Kurve entspricht der sog. Druckbelastungsart [6]. Die Abbildung von P auf G und umgekehrt ist eingehend von COURANT-FRIEDRICHS ([7], S. 260) behandelt worden. Sie ist zwei-zwei-deutig und bildet in P und G je eine zwei-parametrische Menge.

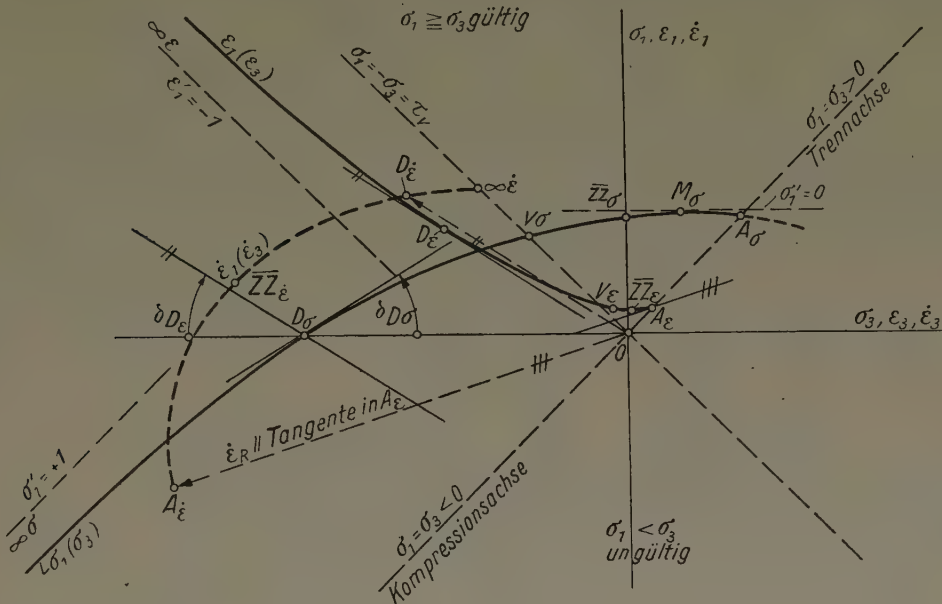


Bild 1. $\sigma_1(\sigma_3)$ -, $\dot{\epsilon}_1(\epsilon_3)$ - und $\dot{\epsilon}_1(\dot{\epsilon}_3)$ -Abbildungen nach Gl. (12)

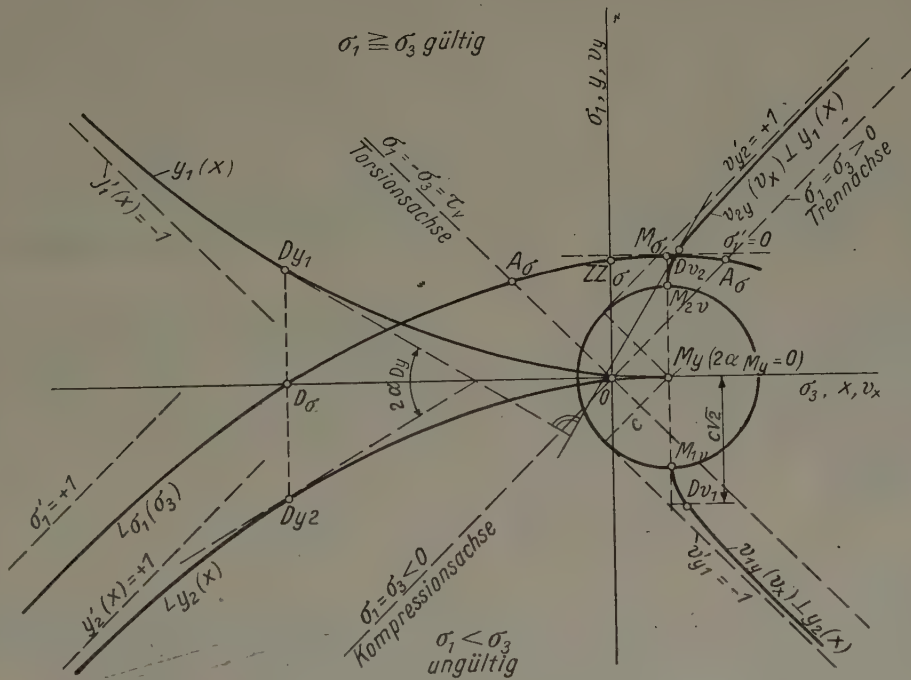


Bild 2. $\sigma_1(\sigma_3)$ -, $y(x)$ - und $v_y(v_x)$ -Abbildungen nach Gl. (12)

Für einen ideal-plastischen Stoff, für den $\sigma'_1 = 1$ und $y' = \pm 1$ gilt, fallen die Punkte $M_v^{1,2}$ in Bild 2 auf Asymptoten $v'_y = \pm 1$, so daß die MACHSche Zahl für diesen Stoff durchwegs $M = v_R/c = \sqrt{2}$ beträgt [8], während $M > \sqrt{2}$ nur formal-mathematisch möglich erscheint. Im Punkt M_σ , wegen $\sigma'_1 = 0$, folgt nach Gl. (20) $2\alpha = 0$, wo wegen Verdünnungswellen im Zuggebiet $M = 1$ angenommen wurde.

Schließlich erhalten wir aus Gl. (7) und (13) Abbildungsgesetze für fünf Räume

$$P(r) = 0, \quad G(b) = 0, \quad S(\xi) = 0, \quad V(\mathfrak{B}) = 0, \quad \dot{V}(\mathfrak{B}) = 0 \quad \dots \dots (22).$$

Das Abbildungsgesetz von V auf G und umgekehrt erhalten wir aus dem Koeffizientenvergleich der Gleichung $d\varepsilon_z = -(\partial v_z/\partial v_x)^2 d\varepsilon_x - \dots$, die aus $d\varepsilon_z = 0$ und Gl. (7) folgt, und $d\varepsilon_z = (\partial \varepsilon_z/\partial \varepsilon_x) d\varepsilon_x + \dots$, die sich aus $\varepsilon_z = \varepsilon_z(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ ergibt, zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varepsilon_x} &= -\left(\frac{\partial v_z}{\partial v_x}\right)^2, & \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \varepsilon_y} &= -\left(\frac{\partial v_z}{\partial v_y}\right)^2, \\ \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \gamma_{xy}} &= -\frac{\partial v_z}{\partial v_x} \frac{\partial v_z}{\partial v_y}, & \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \gamma_{yz}} &= \frac{\partial v_z}{\partial v_y}, & \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \gamma_{zx}} &= \frac{\partial v_z}{\partial v_x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23).$$

Das Abbildungsgesetz von V auf G und umgekehrt ergibt sich aus der Division der linken Seiten der Gl. (23) durch „ ∂ “ zu: $\dot{\varepsilon}_z/\dot{\varepsilon}_x = -(\partial v_z/\partial v_x)^2$, usw.

Da nach Gl. (20) verallgemeinert gilt

$$d\varepsilon_{1,2} = k d\sigma_{1,2}, \quad d\varepsilon_3 = -k d\sigma_3 \dots \dots \dots (24),$$

so kann nach Gl. (23) das Abbildungsgesetz von S auf G und umgekehrt angegeben werden

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_x} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial v_x}\right)^2, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_y} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial v_y}\right)^2, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{\partial v_z}{\partial v_x} \frac{\partial v_z}{\partial v_y}, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{yz}} &= -\frac{\partial v_z}{\partial v_y}, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{zx}} &= -\frac{\partial v_z}{\partial v_x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25).$$

Aus Gl. (25) folgen die „Kompatibilitätsbedingungen“ für die Spannungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_x} - \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{xz}}\right)^2 &= 0, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_y} - \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{yz}}\right)^2 &= 0, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_y} - \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{xy}}\right)^2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{xy}} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{zx}} &= 0, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{xy}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_{zx}} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_y} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (26),$$

Gl. (26/4, 5) können auch aus Gl. (26/1, 2, 3) abgeleitet werden. Nach Gl. (26) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} (d\tau_{xz})^2 - d\sigma_x d\sigma_z &= 0, & (d\tau_{yz})^2 - d\sigma_y d\sigma_z &= 0, & (d\tau_{xy})^2 - d\sigma_x d\sigma_y &= 0, \\ d\tau_{xz} d\tau_{yz} - d\sigma_z d\tau_{xy} &= 0, & d\tau_{xy} d\tau_{yz} d\tau_{zx} - d\sigma_x d\sigma_y d\sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (27).$$

In Gl. (27/1, 2, 3) kommen nur die Spannungen der (x, y) -, (y, z) - und (z, x) -Ebenen getrennt vor. Gl. (27/3) findet sich bereits bei NEUBER [9] und SAUER [10].

Aus Gl. (7/2) dividiert durch „ d “ ergibt sich die CORIOLISSche Beschleunigung (hier mit „2“)

$$b_n = 2 \vec{w} \times \mathbf{v}_t \dots \dots \dots (28).$$

b_n steht senkrecht zur Fläche $z = z(x, y)$ und weist nach innen hin. Hiermit liegen \vec{w} und \mathbf{v}_t in der Tangentialebene dieser Fläche. Da $\vec{w} \times \dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{v}_t$, so entsteht b_n aus der reinen Drehung von \mathbf{v}_t , was mit Gl. (13) übereinstimmt. Es ist $(dS/dt) \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_t$.

Das vollständige Integral von z. B. v_x aus Gl. (7) in einer hinreichend kleinen Umgebung $z_0, x_{i0}, (\partial v_x/\partial x_i)_0 - i = 1, 2 -$ lautet

$$v_x(z, a_i, b_i) = a_0 b_i + \int_a^z w_y dz + \frac{\partial v_z}{\partial v_y} \int_a^z w_z dz \dots \dots \dots (29).$$

In dieser Umgebung muß v_x stetig und zweimal stetig differenzierbar sein und die Ungleichung $|\partial^2 v_x/\partial x_i \partial b_i| \neq 0$ genügen ([11], S. 116). Dabei darf die gesuchte Funktion v_x in Gl. (6) selbst nicht vorkommen. Gl. (29) gilt, wenn das allgemeine Integral der Gl. (7) bekannt ist, wobei die Funktionen x_i und $\partial v_x/\partial x_i$ der Reihe nach die Werte a_i und b_i annehmen.

Im Endlichen können in den Integranden w_y und w_z , Gl. (29), Unstetigkeiten auftreten. Die Integration solcher uneigentlichen Funktionen wird nach der Distributionstheorie von SCHWARTZ durchgeführt [12].

Längs der Transversalen ([13], S. 97) im P -Raum ist v_x konstant. Die Transversalen stellen im S -Raum die Linien konstanter mittlerer Spannung $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ dar. Die Extremalen, die auf der Fläche den geodätischen Linien entsprechen, sind im S -Raum Linien der gleichen Belastungsart [6]. Das uneigentliche Gebiet stellt in Bild 1 der Bogen MA dar, das im Raume zu einer uneigentlichen Fläche wird. Diese Gebiete entsprechen weiterhin den hyperbolischen Grenzzuständen und gehen nicht in die elliptischen Differentialgleichungen über.

Literatur

- [1] M. LAGALLY, Vorlesungen über Vektor-Rechnung. 2. Aufl., Leipzig 1934.
- [2] C. TORRE, Österr. Ing. Archiv 12 (1958), S. 25, Abschn. V; Transact. Soc. Rheology 2 (1958), S. 153.
- [3] H. GEIRINGER, Adv. Appl. Mech. 3 (1953), p. 197; The Ideal Plastic Body, Aufsatz in Handb. d. Physik 6 (1958), p. 322.
- [4] A. NADAI, Theory of Flow and Fracture of Solids, New York 1950.
- [5] A. DUSCHEK u. A. HOCHRAINER, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, II. Teil: Tensoranalysis, Wien 1950.
- [6] C. TORRE, Österr. Ing. Archiv 1 (1946), S. 36, S. 316.
- [7] R. COURANT u. K. O. FRIEDRICHS, Supersonic Flow and Shock Waves, New York 1948.
- [8] NOBUO INOUE, J. Phys. Soc. Japan 6 (1951), p. 460.
- [9] H. NEUBER, ZAMM 28 (1948), S. 253.
- [10] R. SAUER, ZAMM 29 (1949), S. 274.
- [11] E. KAMKE, Differentialgleichungen, 2. Bd., Leipzig 1944.
- [12] K. R. DORFNER, Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik, Berlin 1957.
- [13] G. GRÜSS, Variationsrechnung, 2. Aufl., Heidelberg 1955.

Anschrift: Dr. C. TORRE, Wien IV, Prinz Eugen Str. 80/II/17, Österreich

Strömungsmechanische Probleme bei Hyperschallgeschwindigkeiten *)

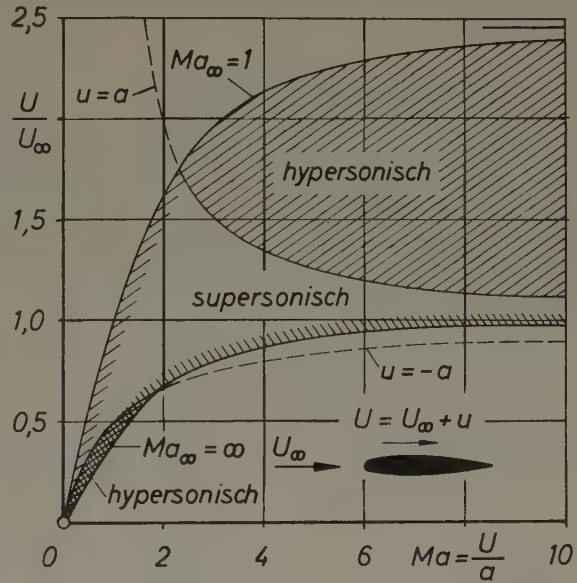
Von E. TRUCKENBRODT

Nimmt bei der Umströmung eines Körpers mit Überschallgeschwindigkeit die Störgeschwindigkeit u Werte an, die absolut genommen größer oder gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit a sind, so sei diese Strömung als Hyperschallströmung bezeichnet. Trägt man das Verhältnis U/U_∞ über der örtlichen MACHzahl $Ma = U/a$ auf, so begrenzt die Kurve $u = a$ die hypersonischen Expansionsströmungen und die Kurve $u = -a$ die hypersonischen Kompressionsströmungen. Unter Beachtung der Zuordnung der örtlichen MACHzahl Ma zur MACHzahl der ungestörten Strömung $Ma_\infty = U_\infty/a_\infty$ erhält man eine weitere Einschränkung des hypersonischen Geschwindigkeitsbereiches.

Bei sehr großen MACHschen Zahlen ist die von dem umströmten Körper verursachte Störung auf einen kleinen, den Körper sehr nah umgebenden Einflußbereich beschränkt, die sogenannte hypersonische Grenzschicht, in der infolge des vor dem Körper sich ausbildenden gekrümmten Verdichtungsstoßes die Strömung drehungsbehaftet ist. Für $Ma_\infty \rightarrow \infty$ streben die physikalischen Eigenschaften, insbesondere die Dichte ρ asymptotischen Werten zu: Expansion $\rho = 0$, Kompression $\rho = [(\kappa + 1)/(\kappa - 1)] \rho_\infty$. Näherungsweise können die Druckkräfte nach der NEWTONschen Theorie berechnet werden.

Für sehr schlanke, vorn spitze Körper kann man die hypersonische Ähnlichkeitsregel herleiten, die aussagt, daß sich die Strömungen um zwei Körper ähnlich verhalten, wenn der hypersonische Ähnlichkeitsparameter $K = Ma_\infty \cdot \vartheta$ unverändert bleibt. Es bedeutet ϑ den Umlenkungswinkel der Strömung. Der Wert $K = 1$ entspricht einer Strömung, bei der die MACHlinie der ungestörten Strömung gerade mit der Neigung der Körperkontur zusammenfällt. Am Beispiel der hypersonischen Eckenströmung (konkav, konvex) kann das starke nichtlineare Verhalten der hypersonischen Strömung gezeigt werden.

Die Berechnung des Verdichtungsstoßes nach Größe (Entropiesprung), Form (gerade oder gekrümmt) und Lage (anliegend oder abgelöst) insbesondere bei vorn stumpfen Körpern ist ein wesentliches Problem der Hyperschalltheorie.



Hypersonische Geschwindigkeitsbereiche

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

Das Auftreten sehr hoher Temperaturen bei der hypersonischen Kompressionsströmung führt bei MACHzahlen von $Ma_\infty > 5$ zu stärkeren Abweichungen der physikalischen Eigenschaften des idealen Gases von denen des realen Gases, was sich in Dissoziation und Ionisation der Moleküle und Atome äußert. Zur theoretischen Behandlung solcher Strömungen müssen neben der kinetischen Gastheorie die Gesetze der Plasmaphysik beachtet werden. Ionisierte Gase haben einen besonderen Zweig der Strömungsmechanik entwickelt, nämlich die „Magneto-Strömungsmechanik“.

Innerhalb der hypersonischen Grenzschicht bildet sich am Körper selbst noch die durch die Zähigkeit des strömenden Mediums bedingte hypersonische Reibungsschicht aus. Da die hypersonische Grenzschicht von derselben Größenordnung ist wie die hypersonische Reibungsschicht, können sich beide stark gegenseitig beeinflussen.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. E. TRUCKENBRODT, Institut für Strömungsmechanik, TH München, München, Arcisstr.

Beitrag zur Stabilität zäher Strömungen

Von W. VELTE*)

(Erscheint im Archive for Rational Mechanics and Analysis)

*) Institut für Angew. Math. und Mechanik der DVL in Freiburg/Br.

Kompressible laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums

Von W. WUEST

„Zweistoffgrenzschichten“ (d. h. Grenzschichten, bei denen zwei verschiedene Gase mit wechselnder Konzentration vorhanden sind) entstehen nicht nur beim Ausblasen eines anderen Mediums durch eine poröse Wand in ein strömendes Gas, sondern bilden sich auch durch Schmelzen und Verdampfen oder Sublimieren von festen Stoffen an der Wand („Ablation“). Hierbei mischen sich die beiden Gase durch Konvektion und Diffusion. Für jede der beiden Gaskomponenten gilt ein Massenerhaltungssatz. Die Summe der beiden Erhaltungssätze entspricht unverändert der Kontinuitätsgleichung bei Einstoffsystemen. Es genügt also, neben der Kontinuitätsgleichung einen der beiden Massenerhaltungssätze beizubehalten, den wir fernerhin als „Konzentrationsgleichung“ bezeichnen. Die Energiegleichung ist um Glieder erweitert, die dem Wärmetransport durch die Diffusion entsprechen. Diese von J. R. BARON [1] und W. WUEST [2] entwickelten Gleichungen lauten bei Vernachlässigung der thermischen Diffusion:

$$\text{Impulsgleichungen} \quad \varrho u \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \dots \quad (1),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (2),$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung} \quad \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad \dots \quad (3),$$

$$\text{Konzentrationsgleichung} \quad \varrho u \frac{\partial c_1}{\partial x} + \varrho v \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\varrho D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) \quad \dots \quad (4),$$

$$\begin{aligned} \text{Energiegleichung} \quad \varrho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \varrho v c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ &+ \varrho D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial y} (c_{p1} - c_{p2}) \frac{\partial T}{\partial y} \quad \dots \quad (5). \end{aligned}$$

In diesen Formeln bezeichnet ϱ die Dichte, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, λ die Wärmeleitfähigkeit, μ die kinematische Zähigkeit und D_{12} den Diffusionskoeffizienten des Gasgemisches. Der Index 1 bezieht sich auf das ausgeblasene Gas, der Index 2 auf das Gas der freien Strömung. $c_1 = \varrho_1/\varrho$ ist die Massenkonzentration des ausgeblasenen Gases.

Im allgemeinen wird man folgende Randbedingungen zugrunde legen können:

An der Wand ($y = 0$) gilt:

$$u = 0, \quad v = v_w(x), \quad T = T_w(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad c_1 = c_{1w}(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial c_1}{\partial y} = \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_w \quad (6),$$

sowie am Außenrand der Grenzschicht:

$$u = u_a(x), \quad T = T_a(x), \quad c_1 = c_{1a}(x) \quad (\text{im allgemeinen} = 0) \quad \dots \dots (7).$$

Da im Gleichgewichtsfall das Außenmedium nicht in die Wand einströmt, gilt zusätzlich die Bedingung

$$v_w = - \frac{D_{12}}{c_2} \frac{\partial c_1}{\partial y} \quad \dots \dots (8). \quad t, c_1, \sigma'$$

Die Konzentration an der Wand ist also im allgemeinen nicht frei wählbar, sondern wird durch die Lösung und die übrigen Randbedingungen bestimmt. Die Stoffgrößen $\rho, \mu, c_p, \lambda, D_{12}$ hängen von der Temperatur und der Konzentration ab.

Die Berechnung rotationssymmetrischer Zweistoffgrenzschichten kann durch eine MÄGLER-Transformation [3] auf den ebenen Fall zurückgeführt werden. Die Gültigkeit dieser Transformation ist auch für Zweistoffgrenzschichten nachgewiesen worden.

Auch bei Zweistoffgrenzschichten existieren „ähnliche Lösungen“, bei denen sich die Grenzschichtprofile an zwei verschiedenen Stellen x nur durch Maßstabsfaktoren in y und u unterscheiden. Wir machen hierzu den Ansatz

$$\frac{u}{u_a} = \frac{\rho_a}{\rho} \sigma'(\zeta) = \Phi_1(\zeta) \cdot \sigma'(\zeta) \quad \dots \dots (9)$$

mit $\zeta = g(x/L) \sqrt{Re} y/L$ und $Re = U_\infty L \rho_\infty / \mu_\infty$.

Der Index a bezieht sich dabei auf den Außenrand der Grenzschicht, L ist eine charakteristische Länge und $g(x/L)$ ist ein längs der Wand veränderlicher Maßstabsfaktor.

Wenn wir noch die weiteren Funktionen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(\zeta) &= \frac{\mu}{\mu_a}, & \Phi_3(\zeta) &= \frac{\lambda}{\lambda_a}, \\ \Phi_4(\zeta) &= \frac{c_p}{c_{pa}}, & \Phi_5(\zeta) &= \frac{\rho}{\rho_a} \frac{D_{12}}{v_a} \end{aligned} \right\} \quad \dots (10)$$

eingeführen, lassen sich die partiellen Differentialgleichungen (1) bis (5) in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführen:

$$[\Phi_2(\Phi_1 \sigma')] + a_1 \sigma(\Phi_1 \sigma') + a_2 (1 - \Phi_1 \sigma'^2) = 0 \quad \dots \dots (11),$$

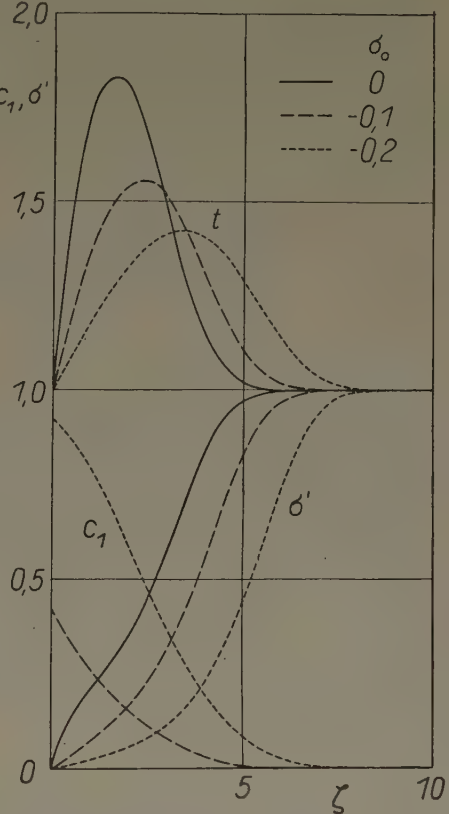
$$a_1 \sigma c'_1 + (\Phi_5 c'_1)' = 0 \quad \dots \dots (12),$$

$$\begin{aligned} a_1 \Phi_4 \sigma t' + (\Phi_3 t')' \frac{1}{Pr_a} + a_3 \Phi_4 \sigma' t - \frac{u_a^2}{a^2} (\kappa - 1) \\ \times [a_2 \Phi_1 \sigma' - \Phi_2 (\Phi_1 \sigma')'^2] + \Phi_5 c'_1 t' \left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}} - 1 \right) = 0 \quad \dots \dots (13). \end{aligned}$$

Hierbei ist $t = T/T_a$, a_1, a_2, a_3 sind Konstante ($a_3 = 0$ für $T_a = \text{const}$), a ist die Schallgeschwindigkeit am Außenrand der Grenzschicht, $Pr_a = c_{pa} \mu_a / \lambda_a$ die PRANDTLsche Zahl. Diese Gleichungen sind nur lösbar

a) für $u_a/u \rightarrow 0$ (inkompressibler Fall). Die Geschwindigkeitsverteilung kann als Potenz- oder Exponentialfunktion vorgegeben sein.

b) für $u_a/a = \text{const}$ (also Grenzschichtströmung an der ebenen Platte oder im Überschallbereich Strömung an Keil- oder Kegelflächen mit anliegendem Verdichtungsstoß).



Zweistoffgrenzschichten an einem Kegel mit $18,3^\circ$ halbem Spitzenwinkel, einer Anström-MACH-Zahl von $M_1 = 12,92$ und einer Anströmtemperatur von -50°C bei Ausblasen von Helium in Luft. Aufgetragen ist die Temperaturverteilung $t = T/T_a$, die Konzentrationsverteilung des Heliums $c_1 = c_1/c_a$ sowie $\sigma' = \frac{\rho}{\rho_a} \cdot \frac{u}{v_a}$ für drei Ausblasemengen σ_0 . Die Ausblasengeschwindigkeit ist proportional $1/\sqrt{x}$ verteilt, wobei x der Abstand von der Kegelspitze ist

Die Auflösung dieser nichtlinearen Gleichungen (11) bis (13) mit variablen Stoffwerten ist als Iterationsverfahren für die elektronische Rechenmaschine IBM 650 programmiert worden. Eine Reihe von Beispielen sind berechnet worden, insbesondere für das Ausblasen von He in eine Hyperschallströmung an einer Kegelspitze (Bild). Die Rechenzeit beträgt bei fünf Iterationen für ein Beispiel etwa zwei Stunden.

Literatur

- [1] J. R. BARON, The binary-mixture boundary layer associated with mass transfer cooling at high speeds. Techn. Rep. 160, 1956, Mass. Inst. Technology Naval Supersonic Laboratory, Cambridge, Massachusetts.
- [2] W. WUEST, Laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums (Zweistoffgrenzschichten). Bericht 60 A 28, 1960, Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, erscheint im Ing.-Arch.
- [3] W. MANGLER, Zusammenhang zwischen ebenen und rotationssymmetrischen Grenzschichten in kompressiblen Flüssigkeiten, ZAMM 28 (1948), S. 97—103.

Anschrift: Privatdozent Dr. WALTER WUEST, Aerodynamische Versuchsanstalt, Göttingen, Bunsenstraße 10

Die Überschallströmung um einen Flügel mit zwei Unterschallvorderkanten^{*)}

Von JÜRGEN ZIEREP^{**)}

Wir betrachten einen dünnen wenig angestellten Flügel in einer Überschallparallelströmung. Für die Bestimmung der stationären Umströmung eines solchen Flügels verwendet man das Singularitätenverfahren. Hierbei werden geeignete Singularitäten auf dem Flügelgrundriß (xz -Ebene) angeordnet und durch Überlagerung derselben die Strömung erzeugt. Für das Störpotential auf dem Flügel gilt (siehe z. B. [1], S. 386):

$$\varphi(x, 0, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \int_{z-(x-\xi)\operatorname{tg}\alpha}^{z+(x-\xi)\operatorname{tg}\alpha} \frac{v(\xi, 0, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} d\zeta d\xi \quad \dots \quad (1).$$

Hierin ist $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$, $M_\infty = \text{MACH-Zahl der Anströmung}$, $\alpha = \text{MACHscher Winkel}$. Ist

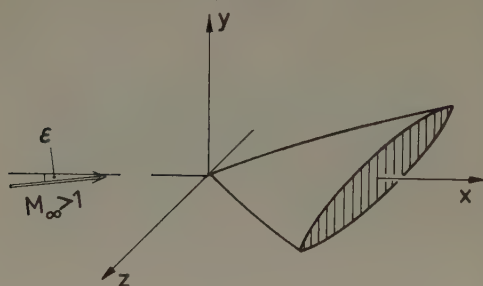


Bild 1

die Anströmung angestellt (Bild 1), so ist v in (1) die Störung der y -Komponente der Strömungsgeschwindigkeit. Die Integration erfolgt in (1) über das gesamte Abhängigkeitsgebiet des Aufpunktes (x, z) . Bekanntlich kann man bei dieser linearen Theorie das Dickenproblem und das Auftriebsproblem getrennt behandeln. Das Dickenproblem führt für das Störpotential (1) auf eine reine Integrationsaufgabe, da die v -Störung, die als Belegung in (1) auftritt, auf dem Flügel durch dessen Form gegeben ist und außerhalb desselben verschwindet. Beim Auftriebsproblem sind dagegen gesonderte Überlegungen erforderlich, die von den Eigenschaften

der Flügelkanten abhängen. Der Sachverhalt wird besonders übersichtlich, wenn man in (1) an Stelle von x, z die charakteristischen Koordinaten s, r verwendet. Es besteht der Zusammenhang

$$s = \frac{M_\infty}{2} \operatorname{tg} \alpha (x - z \operatorname{ctg} \alpha), \quad r = \frac{M_\infty}{2} \operatorname{tg} \alpha (x + z \operatorname{ctg} \alpha) \quad \dots \quad (2).$$

An Stelle von (1) kommt dann:

$$-\pi M_\infty \varphi(r, s) = \int_{-\infty}^r \int_{-\infty}^s \frac{v(\varrho, \sigma)}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} d\sigma d\varrho \quad \dots \quad (3).$$

Hat man zwei Überschallvorderkanten, so ergibt sich das Potential φ nach (3) wieder durch eine reine Integration. In dem Fall einer Unter- und einer Überschallvorderkante ist der Wert von v im Umströmungsbereich der Unterschallkante zunächst unbekannt. Das Verschwin-

^{*)} Der angekündigte Vortrag konnte auf der Tagung nicht gehalten werden.

^{**) TH Aachen und Institut für theoretische Gasdynamik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V.}

den der u -Störung und damit das Verschwinden von φ in diesem Bereich führt mit (3) nach einigen Zwischenbetrachtungen zu der folgenden Darstellung für das Potential¹⁾:

$$-\pi M_\infty \varphi(r, s) = \int_{\varrho_2(s)}^r \int_{\sigma_1(\varrho)}^s \frac{v(\varrho, \sigma)}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} d\sigma d\varrho \quad \dots \quad (4).$$

Es bleibt also bei der Integration über das Abhängigkeitsgebiet des Aufpunktes nur das Integral über ① übrig. Die Bestandteile ② und ③ heben sich exakt auf (Bild 2). Diese Aussage ist das Theorem von EVVARD [2]. Die Bestimmung des Potentials ist damit wieder auf eine reine Integration zurückgeführt. Bei zwei Unterschallvorderkanten ist die Aufgabe komplizierter, da diesmal das v im Umströmungsbereich beider Unterschallkanten unbekannt ist²⁾. Benutzt man hier die Tatsache, daß das Potential φ im Umströmungsbereich beider Vorderkanten verschwindet, so gelangt man zu der folgenden Darstellung (Bild 3):

$$-\pi M_\infty \varphi(r, s) = \int_{\varrho_2(s)}^r \int_{\sigma_1(r)}^s \frac{v(\varrho, \sigma)}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} d\sigma d\varrho - \int_0^{\varrho_2(s)} \int_0^{\sigma_1(r)} \frac{v(\varrho, \sigma)}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} d\sigma d\varrho \quad (5).$$

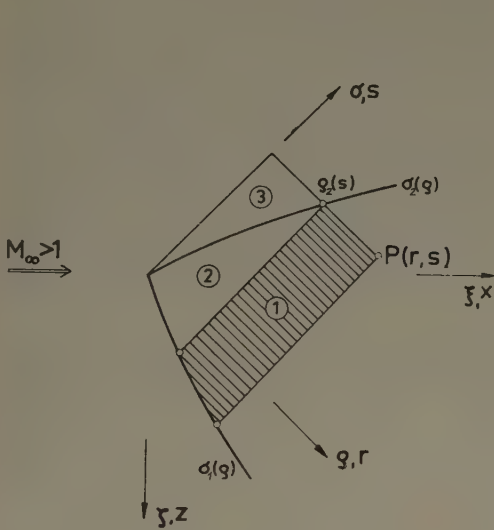


Bild 2

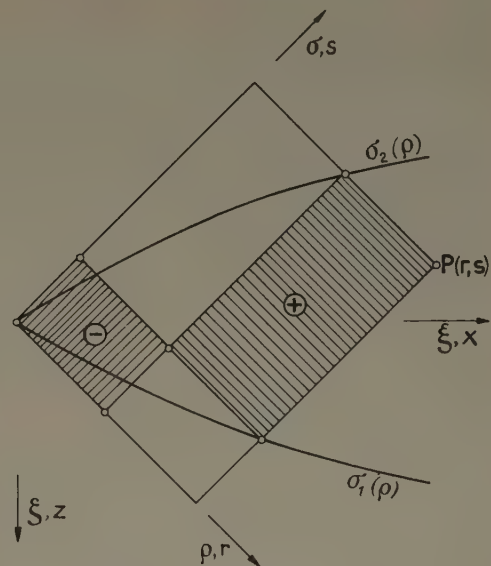


Bild 3

Die Integrationsbereiche sind in Bild 3 schraffiert eingetragen. Der erste Term kann hier sofort berechnet werden, da v auf dem Flügel bekannt ist. Der zweite Anteil enthält dagegen noch unbekannte v -Werte im vorderen Umströmungsbereich der beiden Kanten. Diese Werte können prinzipiell aus einem gekoppelten System von 2 Integralgleichungen vom ABELSchen Typ ermittelt werden. Zu diesem System gelangt man, wenn man das Potential φ im Umströmungsbereich beider Unterschallkanten gleich Null setzt. Das entstehende System kann man etwa durch ein Iterationsverfahren lösen. Für die Anwendungen in der Praxis wird man dagegen eine Abschätzung für das Potential bevorzugen, die wir für den Fall der ebenen Platte angeben wollen. Hier gilt auf dem Flügel

$$v(\varrho, \sigma) = -\varepsilon u_\infty \quad (\varepsilon = \text{Anstellwinkel} > 0) \quad \dots \quad (6).$$

Nimmt man noch $M_\infty = \sqrt{2}$, so lautet (5) nun (Bild 4):

$$\begin{aligned} \frac{\pi \sqrt{2}}{\varepsilon u_\infty} \varphi(r, s) = & \int_{\text{①}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} - \int_{\text{②}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} \\ & + \int_{\text{③}} v(\varrho, \sigma) \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} + \int_{\text{④}} v(\varrho, \sigma) \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} \quad \dots \quad (7). \end{aligned}$$

¹⁾ Die Kanten sind gegeben durch: $\sigma = \sigma_1(\varrho)$, $\sigma = \sigma_2(\varrho)$ (Umkehrfunktion $\varrho = \varrho_2(\sigma)$).

²⁾ Zusatz bei der Korrektur:

Nach Abschluß der vorliegenden Note wies mich Herr Dipl.-Ing. FRIEDEL (München) auf die Arbeiten von B. ETKIN und F. A. WOODWARD (J. of the Aero. Sc. 21, 1954) und G. J. HANCOCK (The Aeronaut. Quart. VIII, 1957) hin. Auch in diesen Arbeiten wird eine Erweiterung des EVVARDschen Theorems auf den Fall zweier Unterschallvorderkanten diskutiert. Z. T. tritt eine Überschneidung mit den Ergebnissen dieser Note ein

Da auf Grund der Umströmung $v(\varrho, \sigma) \geq 0$ in (3) und (4) ist, gelangt man zu der folgenden Abschätzung des Potentials nach oben und unten:

$$\begin{aligned} \iint_{\textcircled{1}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} - \iint_{\textcircled{2}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} &\leq \frac{\pi\sqrt{2}}{\varepsilon u_\infty} \varphi(r, s) \\ &\leq \iint_{\textcircled{1}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} + \iint_{\textcircled{6}} \frac{d\sigma d\varrho}{\sqrt{(r-\varrho)(s-\sigma)}} \quad (8). \end{aligned}$$

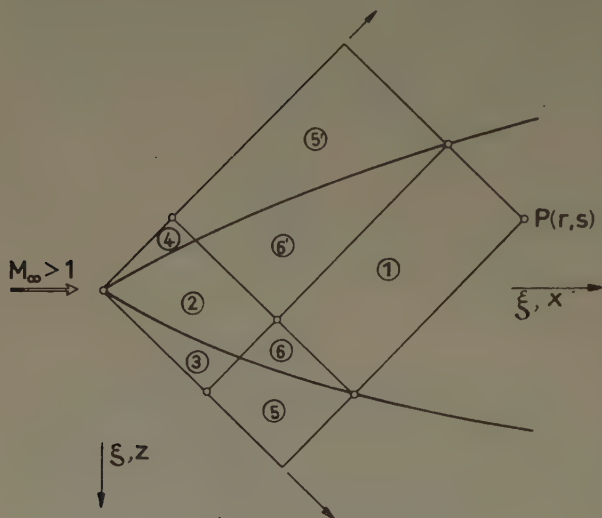


Bild 4

In Abhängigkeit von der Lage von P nimmt man rechts jeweils den kleineren der beiden Bereiche $\textcircled{6}$ oder $\textcircled{6}'$. Beide Schranken bestimmen sich allein durch die Geometrie des Flügels und sind leicht zu berechnen. In den Anwendungen wird man mit guter Näherung das arithmetische Mittel der beiden Schranken für φ nehmen können. Bemerkenswert ist nun, daß in vielen Fällen bereits das Doppelintegral über den Rechteckbereich $\textcircled{1}$, das ja in beiden Schranken auftritt, zu einer beachtlichen Näherung führt. Da dies zu sehr übersichtlichen Formeln Anlaß gibt, die in der Praxis stets erwünscht sind, wollen wir das an einem einfachen Beispiel erläutern. Wir betrachten hierzu den symmetrischen Dreiecksflügel und führen den Vergleich mit der exakten Lösung durch.

Die Kanten des Dreiecksflügels seien durch

$$\zeta = \pm m_1 \xi \quad \text{mit} \quad 0 \leq m_1 \leq 1 \quad (9)$$

gegeben.

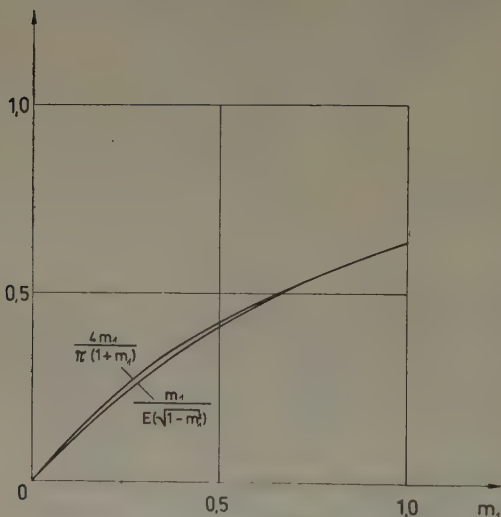


Bild 5

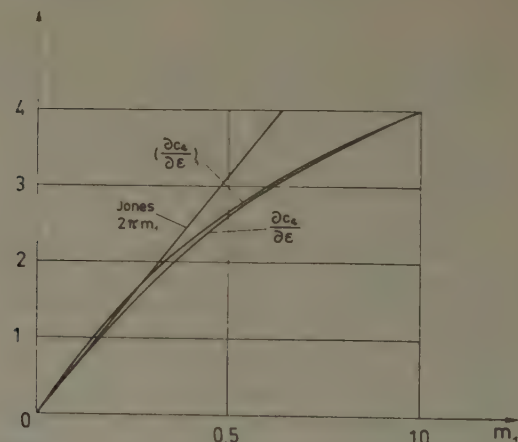


Bild 6

Die Transformation (2) lautet in den Quellpunktskoordinaten:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi - \zeta), \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \zeta).$$

Damit kommt für die Kanten in σ, ϱ

$$\varrho_1 = \frac{1-m_1}{1+m_1} \varrho = k \varrho, \quad \varrho_2 = \frac{1+m_1}{1-m_1} \varrho = \frac{\varrho}{k} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad \dots (10).$$

Für das Doppelintegral über den Bereich $\textcircled{1}$ erhält man nach kurzer Rechnung in dimensionsloser Form:

$$\frac{\varphi_1(x, z)}{\varepsilon u_\infty x} = \frac{4 m_1}{\pi (1 + m_1)} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{m_1 x}\right)^2} \quad \dots (11).$$

Dagegen lautet die exakte Lösung für das Potential in diesem Fall (siehe etwa [1], S. 398)

$$\frac{\varphi(x, z)}{\varepsilon u_\infty x} = \frac{m_1}{E (\sqrt{1 - m_1^2})} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{m_1 x}\right)^2} \dots \dots \dots (12).$$

E ist hierin das vollständige elliptische Integral 2. Gattung. Wir erkennen an (11) und (12), daß die von x und z abhängige Funktion in beiden Fällen dieselbe ist. Bild 5 zeigt weiterhin, daß auch die von m_1 abhängigen Koeffizientenfunktionen im ganzen Bereich $0 \leq m_1 \leq 1$ nur wenig voneinander abweichen, wenngleich auch die relative Abweichung für $m_1 \rightarrow 0$ beachtlich wird. Der Druckpunkt liegt in beiden Fällen bei 2/3-mal der Flügeltiefe. Für die Auftriebsbeiwerte erhält man bei Benutzung von (11)

$$\left(\frac{\partial c_a}{\partial \varepsilon}\right)_1 = \frac{8 m_1}{1 + m_1} \dots \dots \dots (13)$$

und bei Benutzung von (12)

$$\frac{\partial c_a}{\partial \varepsilon} = \frac{2 \pi m_1}{E (\sqrt{1 - m_1^2})} \dots \dots \dots (14).$$

Bild 6 zeigt diese Ergebnisse mit dem Resultat von JONES $\left(\frac{\partial c_a}{\partial \varepsilon} = 2 \pi m_1\right)$ für den Flügel kleiner Streckung.

Die bemerkenswerte Tatsache, daß bereits das erste Integral in (5) bzw. (7) zu einer in vielen Fällen ausreichenden Näherung führt, ist nun keineswegs auf den symmetrischen Dreiecksflügel beschränkt. Bei komplizierteren Anordnungen — wie z. B. beim Doppeldreiecksflügel und auch beim unsymmetrischen Flügel — ergibt sich dadurch eine außerordentliche Reduktion des numerischen Aufwandes. In allen Fällen erweist es sich jedoch als zweckmäßig, daß man sich als Kontrolle zunächst eine Übersicht über die Schranken in (8) verschafft, um gegebenenfalls die obige erste Näherung zu verbessern.

Literatur

- [1] K. OSWATITSCH, Gasdynamik, Wien 1952, Springer-Verlag.
- [2] J. C. EVVARD, NACA TN 1382, 1947.

Anschrift: Doz. Dr. J. ZIEREP, Aachen, Karl-Marx-Allee 100

E. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK

Die Bedeutung von Monte-Carlo-Methoden für die Dimensionierung von Nachrichtenvermittlungsanlagen

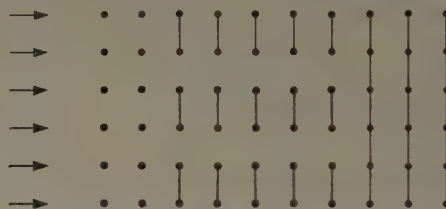
Von G. BRETSCHNEIDER¹⁾

Bei Warteschlangenproblemen und verwandten Aufgabenstellungen trifft man auf folgende Gegebenheiten:

Es gibt einen Strom von Anrufen oder Bestellungen, der einer Anzahl von Abnehmerleitungen oder Geräten zugeleitet wird. Jeder Anruf muß von einer der Abnehmerleitungen bedient werden und belegt sie dann für eine bestimmte Zeitspanne. Anrufe, die bei ihrem Eintreffen keine Abnehmerleitung frei vorfinden, dürfen — eventuell mit irgend welchen Einschränkungen — warten oder gehen verloren.

Während derartige Probleme unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die stochastischen Prozesse des Einfalls und der Abfertigung der Anrufe behandelt worden sind ([1] bis [3]), hat man der Struktur der Abnehmerleitungsanordnung in mathematischen Arbeiten bisher keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt und hierfür mit ganz wenigen Ausnahmen [4] die einfachste mögliche Gestalt gewählt. Eine derartige einfachste Struktur liegt dann vor, wenn alle Abnehmerleitungen vom Verkehrsfluß uneingeschränkt benutzt werden können, d. h. ein „vollkommenes Bündel“ bilden.

In Nachrichtenvermittlungsanlagen sind vollkommene Bündel aus technischen und wirtschaftlichen Gründen nur in Grenzfällen zu verwirklichen. Man bildet hier häufig sogenannte unvollkommene Bündel etwa von folgender Struktur:



Beispiel für ein unvollkommenes Bündel von 30 Abnehmerleitungen

Derartige Anordnungen sind dadurch gekennzeichnet, daß die Abnehmerleitungen weder ein gemeinsames vollkommenes Bündel bilden noch in mehrere getrennte vollkommene Bündel zerfallen.

Einer solchen Anordnung werde ein Fluß von Anrufen zugeleitet, wobei

1. die Einfallabstände der Anrufe in allen m Teilgruppen (im Beispiel $m = 6$) exponentiell verteilt und unabhängig voneinander sind und die Mittelwerte $a_1 \dots a_m$ haben,
2. jeder Anruf die für ihn erreichbaren Abnehmerleitungen der Reihenfolge nach absucht und die erste freie Abnehmerleitung belegt,
3. die Dauern aller erzeugten Belegungen exponentiell verteilt, unabhängig voneinander und von den Einfallabständen sind und alle den gleichen Mittelwert T haben,
4. Anrufe, die keine freie Abnehmerleitung finden können, verloren gehen und aus dem System verschwinden.

Gesucht ist der Grenzwert (nach dem Abklingen von Einschwingvorgängen) der Verlustwahrscheinlichkeit, also der Wahrscheinlichkeit, daß ein zufallsmäßig herausgegriffener Anruf verloren geht.

Dieser Wert läßt sich bestimmen, wenn man zunächst das zugehörige lineare Gleichungssystem für die Grenzwerte der Zustandswahrscheinlichkeiten der gegebenen Anordnung löst. Das ist aber in den meisten Fällen auch mit elektronischen Rechenautomaten nicht möglich, da solche Gleichungssysteme zu hohen Rang haben [1]. Für das vergleichsweise einfache Beispiel (s. Bild) kann dieser Rang durch Ausnutzen aller Regelmäßigkeiten der gegebenen Anordnung nur bis auf $6,4 \cdot 10^5$ heruntergedrückt werden (bei gleichen Einfallabständen der Anrufe in allen Teilgruppen bis auf $3,4 \cdot 10^4$).

Es ist andererseits möglich, einen Näherungswert für die gesuchte Verlustwahrscheinlichkeit durch Monte-Carlo-Methoden zu erhalten. Hierbei könnte man, von gleichwahrscheinlichen Zu-

¹⁾ Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG.

fallszahlenfolgen ausgehend, die exponentiellen Einfall- und Belegungsvorgänge approximieren und damit einen künstlichen Verkehr auf einem Modell der gegebenen Anordnung simulieren, an dem dann ein Wert für die Verlustwahrscheinlichkeit durch Auszählen zu bestimmen ist. Dieser Weg ist jedoch unzweckmäßig, weil

1. die Forderung nach möglichst exakter Nachbildung der exponentiellen Verteilungen zu einer starken Verschwendung an Zufallszahlen und damit an Zeit führt und

2. die noch bestehenden Abweichungen zwischen den wahren exponentiellen Verteilungen und ihren Approximationen zu systematischen Abweichungen beim Ergebnis führen müssen.

Eleganter ist es, nicht den gegebenen stochastischen Prozeß des Verkehrsablaufs zu approximieren, sondern einen anderen entsprechenden Verkehrsprozeß aufzusuchen, der sich ohne systematische Fehler nachbilden läßt und der die gleiche stationäre Lösung, also das gleiche lineare Gleichungssystem für die Grenzwerte der Zustandswahrscheinlichkeiten besitzt wie der vorgelegte Prozeß. Ein solcher Prozeß ist leicht anzugeben. Man ordnet hierzu je q verschiedene Zufallszahlen jeder der N Abnehmerleitungen und je p_i weitere verschiedene Zufallszahlen jeder der m Teilgruppen zu, wobei

$$\frac{p_i}{q} = \frac{T}{a_i}$$

sein muß.

Eine Folge derartiger gleichwahrscheinlicher Zufallszahlen wertet man so aus, daß das Auftreten einer Zufallszahl, die einer Abnehmerleitung zugeordnet ist, auf dieser eine etwa vorhandene Belegung beendet und das Auftreten einer Zufallszahl, die einer Teilgruppe zugeordnet ist, einen Anruf in ihr darstellt (Einzelheiten s. [5]). Mit einem derartigen Prozeß läßt sich die Verlustwahrscheinlichkeit ohne systematischen Fehler bestimmen, wenn die verwendete Zufallszahlenfolge ohne systematischen Fehler ist. Die Genauigkeit jedes Näherungswertes ist aber durch die statistische Natur des Prozesses begrenzt. Ein Maß für die mögliche Abweichung vom „wahren“ Wert ist die Varianz (Streuung) σ^2 . Bei M Anrufen und der „wahren“ Verlustwahrscheinlichkeit B ergibt sich für das vollkommene Bündel

$$\sigma^2 = \lambda B (1 - B) M \quad \dots \dots \dots (1)$$

mit

$$1 \leq \lambda \leq 4 \quad \dots \dots \dots (2)$$

(siehe auch unter etwas anderen Voraussetzungen [6]). Für unvollkommene Bündel konnte eine (2) entsprechende Bedingung nicht hergeleitet werden. Es ergab sich empirisch bei vielen Testen

$$\lambda \approx 4 \text{ bis } 10 \quad \dots \dots \dots (3).$$

Eine Verkleinerung der Varianz ist erreichbar, wenn der gleiche künstliche Verkehr außer der vorgelegten Anordnung noch einer ähnlichen Anordnung angeboten wird, die so einfach ist, daß sich für sie das entsprechende lineare Gleichungssystem lösen läßt. Die Differenzen der Anzahlen an verlorenen Belegungen können erheblich kleinere Varianz haben als diese Anzahlen selbst. So konnte für die auf dem Bild angegebene Anordnung und für gleiches Angebot in allen Teilgruppen in einem Fall eine Verminderung der Varianz auf $\frac{1}{9}$ des ursprünglichen Wertes erreicht werden. Zum Vergleich wurde dabei eine Anordnung herangezogen, die aus sechs Teilgruppen mit je vier individuellen und sechs gemeinsamen Leitungen bestand und deren zugehöriges lineares Gleichungssystem die Ordnung 1470 hatte (Lösung dieses Systems durch Überrelaxation [7], [8]).

Literatur

- [1] B. W. GNEDENKO, Über einige Aspekte der Entwicklung der Theorie der Warteschlangen, MTW 7 (1960), S. 162—166.
- [2] V. E. BENEŠ, General Stochastic Processes in Traffic Systems with One Server, BSTJ 39 (1960), p. 127—160.
- [3] R. SYSKI, Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems, Edinburgh u. London 1960, Oliver u. Boyd.
- [4] C. PALM, Calcul exact de la perte dans les groupes de circuits échelonnés, Ericsson Technics 4 (1936), p. 41—71.
- [5] R. BÖTTGER, Eine Monte-Carlo-Methode zum Bestimmen der Leistungsfähigkeit von Fernsprech-Vermittlungsanordnungen durch Datenverarbeitungsanlagen, NTZ 6 (1961), S. 291—293.
- [6] L. KOSTEN, J. R. MANNING, F. GARWOOD, On the Accuracy of Measurements of Probabilities of Loss in Telephone Systems, Journ. Roy. Stat. Soc. Ser. B 11 (1949), p. 54—67.
- [7] D. YOUNG, Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type, Transact. Am. Math. Soc. 76 (1954), p. 92—111.
- [8] G. KJELLBERG, On the Convergence of Successive Over-Relaxation Applied to a Class of Linear Systems of Equations with Complex Eigen-Values, Ericsson Technics 14 (1958), p. 245—258.

Anschrift: Dr. GERHARD BRETSCHEIDER, (13b) München 12, Geroltstraße 36

Instationäre Irrfahrten im Gitter

Von ERNST HENZE*)

Gegeben sei im N -dimensionalen Raum das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten bzw. ein äquivalentes Gitter. Ein Gitterpunkt, d. h. ein N -reihiger Vektor wird mit

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)' \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)'$$

bezeichnet. Eine Partikel, ein Spaziergänger o. ä., führe nun auf diesem Gitter eine Irrfahrt aus, d. h. sie wandere nach vorgegebenen Zufallsgesetzen auf diesen Gitterpunkten, wobei in jeder Zeiteinheit eine Bewegung erfolgt. Das beschreibende wahrscheinlichkeitstheoretische Modell ist dann eine — i. a. instationäre — MARKOFFsche Kette und ist mit der Vorgabe der elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten, das sind die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Übergänge in einer Zeiteinheit, und mit der Angabe der Startwahrscheinlichkeiten eindeutig bestimmt.

Der allgemeinste Fall einer solchen Gitter-Irrfahrt liegt nun vor, wenn die elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten — x_i sei die beschreibende Zufallsvariable und e^k der k -te Einheitsvektor des Raumes —

$$\left. \begin{aligned} P \left\{ x_{t+1} = x + \sum_{q=1}^N k_q e^q \mid x_t = x \right\} &= p(k_1, k_2, \dots, k_N; x, t), \\ 0 &\leq p(k_1, k_2, \dots, k_N; x, t) \leq 1, \\ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2, \dots, k_N; x, t) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

von der Zeit t und dem gerade betrachteten Punkt x abhängen. Man spricht in diesem Falle von einer instationären, räumlich inhomogenen Irrfahrt mit allgemeiner Wanderungsart des Teilchens. Es sollen die ersten beiden Momente der Verteilung (1) existieren. Eine spezielle Wanderungsart des die Irrfahrt ausführenden Teilchens ist die sogenannte PÓLYASche Wanderungsart. Bei dieser kann das Teilchen in der Zeiteinheit nur zu den $2N$ Nachbarpunkten des gerade erreichten Gitterpunktes weiterwandern oder allenfalls noch eine Zeiteinheit lang im gerade erreichten Ort

verweilen; hier ist in (1) also nur $k_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$ erlaubt.

Bei der Theorie der Irrfahrten nimmt die Frage nach der allgemeinen Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(\tau, \xi; t, x) = P \{ x_t = x \mid x_\tau = \xi \}, \quad \tau \leq t \dots \dots \dots (2)$$

eine zentrale Stellung ein, es soll hauptsächlich dieses sogenannte Übergangsproblem behandelt werden.

Ursprünglich wurde die Gitterirrfahrt nur mit PÓLYAScher Wanderungsart behandelt. G. PÓLYA [10] selbst definierte sie 1921 und zeigte, daß im quadratischen Gitter der Ebene eine solche unbegrenzt andauernde stationäre, räumlich homogene Irrfahrt mit symmetrischen elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten — jede gleich $1/2N$ — jeden Gitterpunkt mit Wahrscheinlichkeit 1 mindestens einmal erreicht, für höhere Dimensionen des Gitters dagegen nicht mehr. Er leitete auch für die allgemeine Übergangswahrscheinlichkeit (2) einen geschlossenen Ausdruck ab. Weitere Ergebnisse — allerdings nicht für die Übergangswahrscheinlichkeit selbst — erzielten dann MCCREA und WHIPPLE [9] für die symmetrische, zweidimensionale, stationäre und räumlich homogene Irrfahrt; z. T. mit absorbierenden Rändern. Für die unsymmetrische, zweidimensionale, stationäre und räumlich homogene Irrfahrt hat für spezielle Fälle ohne Drift WATANABE [12], [13] und für den allgemeinen unsymmetrischen Fall der Verfasser [6], [7] u. a. das Übergangsproblem gelöst. Von dem entsprechenden N -dimensionalen Fall hat ebenfalls WATANABE einen ganz speziellen symmetrischen Sonderfall gelöst. Für räumlich inhomogene Irrfahrten mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten und PÓLYASche Wanderungsart liegen nur einige elementare Ansätze von DERMAN [1] und GILLIS [5] vor.

Da der Fall der PÓLYASchen Irrfahrt ein Spezialfall der Irrfahrt mit allgemeiner Wanderungsart des Teilchens ist, behandeln wir im folgenden nur den allgemeineren Fall. An Vorarbeiten liegen hier die Abhandlungen von KLEIN [8], FOSTER und GOOD [4] und DOMB [2] vor. Alle behandeln nur den stationären Fall. KLEIN behandelt den zweidimensionalen Fall, aber mit einer

*) Forschungsinstitut der Firma Telefunken GmbH, Ulm (Donau) und Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Stuttgart.

Abhängigkeit der beiden Koordinaten, er gibt auch keine Lösung des Übergangsproblems an. FOSTER und GOOD behandeln den N -dimensionalen symmetrischen Fall, für den eine Symmetrie der elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten in bezug auf den betrachteten Punkt x des Gitters besteht. Sie leiten einen geschlossenen Ausdruck nur für die Rückkehrwahrscheinlichkeit $P(\tau, \xi; t, \xi)$ ab. DOMB schließlich gewinnt auf einfachere Weise noch einmal die Resultate von FOSTER und GOOD.

Die Frage nach der allgemeinen Übergangswahrscheinlichkeit (2) für den allgemeinsten, d. h. instationären und räumlich inhomogenen Fall ist noch völlig offen und wird auch hier nicht beantwortet. Dagegen ist es gelungen, für die räumlich homogene, instationäre Irrfahrt mit beliebiger — und damit als Sonderfall auch mit PÓLYAScher Wanderungsart des Teilchens — die allgemeine Übergangswahrscheinlichkeit (2) in geschlossener Form herzuleiten und die Eindeutigkeit dieser Lösung zu beweisen.

Damit sind u. a. für die PÓLYASche Wandungsart mit beliebig vorgegebenen elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten und für den stationären Sonderfall die erwähnten Teilergebnisse als Spezialfälle enthalten und hier auch das Klassifikationsproblem, d. h. die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, mit der die Irrfahrt jeden Punkt des Gitters mindestens einmal erreicht, noch einmal aufgeworfen und gelöst worden — es stellt sich heraus, daß für den Fall verschwindender erster und endlicher zweiter Momente der Verteilung der elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten (1) für $N = 1$ und $N = 2$ alle Punkte des Gitters mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder erreicht werden, für $N \geq 3$ dagegen nur mit einer Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 1 ist; für den Fall einer echten Drift, d. h. nicht verschwindender erster Momente werden alle Punkte des Gitters nur mit einer Wahrscheinlichkeit, die kleiner als 1 ist, erreicht.

Die Ergebnisse wurden, ausgehend von der bekannten CHAPMAN-KOLMOGOROFF-Gleichung als Lösungen der prospektiven bzw. retrospektiven Differenzengleichung mit den entsprechenden Anfangswerten gefunden. Die prospektive Gleichung lautet im allgemeinsten hier behandelten Fall, d. h. für eine instationäre, räumlich homogene Irrfahrt mit allgemeiner Wanderungsart des Teilchens

$$P(\tau, \xi; t + 1, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2, \dots, k_N; t) P\left(\tau, \xi; t, x - \sum_{q=1}^N k_q e^q\right) \dots \quad (3)$$

und die Anfangsbedingung z. B.

$$P\left(\tau, \xi; \tau + 1, \xi + \sum_{q=1}^N k_q^* e^q\right) = p(k_1^*, k_2^*, \dots, k_N^*; \tau) \dots \dots \dots (4).$$

Eigentlich müßte man noch $k_q = k_q(t)$ schreiben, daß sei hier der Übersichtlichkeit halber fortgelassen.

Die eindeutige Lösung des Übergangsproblems lautet nun

$$P(\tau, \xi; t, x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\vartheta=\tau}^{t-1} \left\{ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_N=-\infty}^{\infty} p(k_1, k_2, \dots, k_N; \vartheta) e^{-i(\alpha, k(\vartheta))} \right\} \\ \times e^{i(\alpha, x-\xi)} d\alpha_1 \dots d\alpha_N \dots \dots \dots (5),$$

wobei (α, k) und $(\alpha, x - \xi)$ die Skalarprodukte $\sum_{q=1}^N \alpha_q k_q(\vartheta)$ und $\sum_{q=1}^N \alpha_q (x_q - \xi_q)$ sind. Man gewinnt diese Lösung in Anlehnung an die Methode von STÖHR [11], der die Hauptlösung von partiellen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten herleitete. Die STÖHRschen Gleichungen sind u. a. die Analoga zu der prospektiven Gleichung für die PÓLYASche Wanderung des Teilchens im ebenen Gitter. Für die allgemeine Übergangswahrscheinlichkeit (5) wurden nun noch einige Ansätze für die Behandlung der Irrfahrt in begrenzten Gebieten gegeben, deren Berandungen aus 1-absorbierenden Punkten zusammengesetzt sind und schließlich das Verhalten dieser Lösung (5) für verschwindende Maschenweite des Gitters und verschwindenden Zeitmaßstab untersucht. Dabei betrachten wir den für die Anwendungen wichtigen Fall der Unabhängigkeit der Zuwächse $k_q(t)$. Hierbei geht die Lösung (5) in die Dichte der Normalverteilung

$$\Phi(\tau, \xi; t, x) = \frac{(2\pi)^{-N/2}}{\left[\prod_{q=1}^N S_q^2(\tau, t) \right]^{1/2}} \cdot e^{-\sum_{q=1}^N \frac{\left\{ x_q - \xi_q - \int_{\tau}^t v_q(\vartheta) d\vartheta \right\}^2}{2 S_q^2(\tau, t)}} \dots \dots \dots (6)$$

mit $S_e^2(\tau, t) = \int_{\tau}^t \sigma_e^2(\vartheta) d\vartheta$ über, wobei die $\sigma_e^2(t)$ die Diffusionskoeffizienten sind und $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t))$ der Driftvektor der Irrfahrt ist. Aus der prospektiven Differenzengleichung wird die zweite KOLMOGOROFFSche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \sigma_e^2(t) \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \Phi - \sum_{e=1}^N v_e(t) \frac{\partial}{\partial x_e} \Phi \quad \dots \quad (7),$$

aus der entsprechenden retrospektiven Gleichung die erste KOLMOGOROFFSche Gleichung oder Diffusionsgleichung von FOKKER und PLANCK. Auch hier kann man aus dem Charakter der Dichte einer Normalverteilung nach dem bekannten Ergebnis von FELLER [3] sofort auf die Eindeutigkeit dieses Resultates als Lösung der Differentialgleichung und damit des Problems schließen.

Literatur

- [1] C. DERMAN, Some Contributions to the Theory of Denumerable Markov Chains, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), p. 541—555.
- [2] C. DOMB, On Multiple Returns in the Random Walk Problem, Proc. Cam. Phil. Soc. **50** (1954), p. 586—591.
- [3] W. FELLER, Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeigkeitssätze), Math. Ann. **113** (1936), S. 113—160.
- [4] F. G. FOSTER and I. J. GOOD, On a Generalisation of Pólyas Random Walk Theorem, Quarterly J. Math., Oxford Ser. **2**, **4** (1953), p. 120—126.
- [5] J. GILLIS, Centrally Biased Discrete Random Walk, Quarterly J. Math., Oxford Ser. **2**, **7** (1956), p. 144—152.
- [6] E. HENZE, Beiträge zum Irrfahrtproblem, Diss. TH Stuttgart 1958.
- [7] E. HENZE, Zur Theorie der diskreten unsymmetrischen Irrfahrt, ZAMM **41** (1961), S. 1—9.
- [8] G. KLEIN, Generalisation of the Classical Random Walk Problem, and a Simple Model of Brownian Motion Based Thereon, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A **63** (1952), p. 268—279.
- [9] W. H. McCREA and F. J. W. WHIPPLE, Random Paths in Two and Three Dimensions, Proc. Royal Soc. Edinburgh LX (1939/40), p. 281—298.
- [10] G. PÓLYA, Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz, Math. Ann. **84** (1921), S. 144—160.
- [11] A. STÖHR, Über einige lineare partielle Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten I, II, III, Math. Nachr. **3** (1950), S. 208—242, 295—315, 330—337.
- [12] Y. WATANABE, Aufgaben betreffend das Irrfahrtproblem, J. Gakugei, Tokushima Univ. **6** (1955), p. 41—49.
- [13] Y. WATANABE, Einige Erweiterung des Pólyaschen Irrfahrtproblems, J. Gakugai, Tokushima Univ. **8** (1957), p. 13—25.

Anschrift: Dr. E. HENZE, Ulm, Burgunderweg 9

Faktorentheorie, Konstitutionstheorie

VON PAUL LORENZ

Die Faktorentheorie und ihre Technik, die Faktor-Analyse (Factor Analysis) sind von Psychologen begründet und ausgebaut worden. Anwendungen auf anderen Gebieten der Forschung sind bisher selten und unvollständig. Ich glaube aber, daß es an der Zeit ist, zu solchen Anwendungen zu schreiten, und zwar nicht nur in den Wissenschaften vom Menschen sondern auch in denen von den Tieren und Pflanzen.

Die Faktorentheorie hat bereits eine lange Geschichte. Der erste einschlägige Aufsatz, von KRUEGER und SPEARMAN, ist 1906 erschienen. Der neueste Stand wird dadurch gekennzeichnet, daß man sich nicht nur mit den Merkmalen der Art (species) beschäftigt, sondern auch mit den die Individuen unterscheidenden. Der Name Faktorentheorie trifft diesen neuesten Stand nicht mehr. Ich schlage statt seiner den Namen Konstitutionstheorie vor, ohne diese weite Bezeichnung durch den folgenden Ansatz ausschöpfen zu wollen. Ich formuliere:

„Jede Eigenschaft eines Lebewesens ist Wirkung eines speziellen Agens, das geometrisch durch einen Vektor repräsentiert werden kann. Die Vektoren sind im allgemeinen verschieden gerichtet und verschieden lang und bilden ein starres Büschel. Es gibt nur ein solches Vektorbüschel für alle Individuen einer Art (species). Man kann es sich als vom Ursprung eines bestimmten rechtwinkligen Koordinatensystems ausgehend vorstellen, und zwar eines ein- oder mehrdimensionalen. Ich nenne die Projektionen der Vektoren auf die Achsen des Koordinatensystems Faktoren, und zwar die Projektionen auf die Achse 1 Faktoren erster Form, die Projektionen auf die Achse 2 Faktoren zweiter Form usw., und symbolisiere sie durch die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets mit Indices. Zum Beispiel seien die Faktoren für das Gewicht $a_1 a_2 \dots$, für die Länge $b_1 b_2 \dots$ und so weiter. Die Faktoren sind für alle Angehörigen einer Art (species) identisch gleich, sind Artmerkmale.

Die Tatsache, daß die Eigenschaften in den verschiedenen Individuen in verschiedenem Grade ausgebildet sind, wird dadurch erklärt, daß die Faktoren in verschiedenen Individuen in verschiedenem Grade zur Wirkung gelangen. In einem Individuum aber gehört zu allen Faktoren der ersten Form derselbe Wirkungsgrad, und ebenso gehört zu allen Faktoren der zweiten Form nur ein einziger Wirkungsgrad und so weiter. Die Wirkungsgrade der verschiedenen Faktorformen hängen nicht voneinander ab, weder funktionell noch stochastisch. Ich symbolisiere sie durch den Buchstaben x mit 2 Indices. Zum Beispiel bedeutet x_{1i} den Wirkungsgrad der Faktoren erster Form in dem Individuum mit der Nummer i . Die Wirkungsgrade sind höchstindividuelle Merkmale“.

Für einen besonderen Fall kann die Theorie dargestellt werden durch die folgende

Übersicht 1

| Eigenschaft | gemessen | theoretisch | in Matrizenform |
|---------------------|----------|--|---|
| Gewicht | A_i | $a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + a_3 x_{3i}$ | $\begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \\ E_i \\ F_i \\ G_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{pmatrix}$ |
| Länge | B_i | $b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i}$ | |
| Stammlänge | C_i | $c_1 x_{1i} + c_2 x_{2i} + c_3 x_{3i}$ | |
| Brustumfang | D_i | $d_1 x_{1i} + d_2 x_{2i} + d_3 x_{3i}$ | |
| Schulterbreite | E_i | $e_1 x_{1i} + e_2 x_{2i} + e_3 x_{3i}$ | |
| Hüftbreite | F_i | $f_1 x_{1i} + f_2 x_{2i} + f_3 x_{3i}$ | |
| Vitalkapazität | G_i | $g_1 x_{1i} + g_2 x_{2i} + g_3 x_{3i}$ | |
| für $i = 1 \dots n$ | | | abgekürzt $\mathfrak{A}_i \sim \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_i$ |

Die Matrix \mathfrak{A} ist für alle Individuen derselben Species dieselbe aber, die Matrizen \mathfrak{A}_i und \mathfrak{x}_i sind in der Regel von einem Individuum zum andern verschieden. Im Falle $n = 100$ erhält man aus der Übersicht 1 700 Näherungsgleichungen mit 321 Unbekannten. Der ganze Ansatz hat natürlich nur dann Erkenntniswert und vielleicht auch praktischen Nutzen, wenn es gelingt, ein sinnvolles System von 321 Werten zu finden, das den 700 Näherungsgleichungen genügt.

Ähnliche Systeme von Näherungsgleichungen treten in der Linearplanung auf. Während es sich aber bei der Unternehmungsforschung darum handelt, eine Kombination der Unbekannten zu finden, für welche eine gewisse Zielfunktion ein Extrem wird, handelt es sich in der Konstitutionstheorie darum zu untersuchen, ob der Ansatz überhaupt sinnvoll ist.

Dank dem Postulat, daß die Wirkungsgrade der verschiedenen Faktorformen nicht voneinander abhängen, gelingt es mittels der Korrelationsrechnung, aus dem System der 700 Näherungsgleichungen die 300 Unbekannten $x_{1i} x_{2i} x_{3i}$ zunächst ganz auszuschalten und ein System von 21 quadratischen Näherungsgleichungen mit den Faktoren als Unbekannten zu erhalten. Die Lösung erfordert eine besondere Technik. Leider haftet den Lösungen vom mathematischen Blickpunkt ein grundsätzlicher Mangel an. Man erhält nämlich nicht eine bestimmte Lösung sondern eine Mannigfaltigkeit von Lösungen, aus der man eine, nach nichtmathematischen Gesichtspunkten, auswählen muß. Als Leitfaden bedient man sich dabei des Strebens nach einer möglichst einleuchtenden Deutbarkeit. Da das nichts Neues ist, möchte ich dazu auf die Literatur verweisen.

Nachdem man für die Faktoren Werte festgelegt hat, setzt man sie in der Übersicht 1 ein. Dann bleiben in dieser als Unbekannte die 3 Wirkungsgrade des Individuums i . Man erhält so viele Systeme von je 7 Näherungsgleichungen mit 3 Unbekannten, wie das zugrundegelegte statistische Kollektiv Individuen enthält. Dazu treten 6 weitere Bedingungen wegen des Umstandes, daß man sich die Unbekannten als normiert zu denken hat, und 3 wegen des Postulats.

Einerseits reichen nun die 3 Unbekannten $x_{1i} x_{2i} x_{3i}$ nicht aus, um die rechten Seiten der 7 Näherungsgleichungen der Übersicht 1 fast genau gleich den linken Seiten zu machen, andererseits sind sie durch die 7 Näherungsgleichungen nicht vollständig bestimmt, eben weil es nur Näherungsgleichungen sind. Ich führe deshalb noch eine zusätzliche Forderung ein, nämlich daß die zu ermittelnden Werte eine Bestlösung im Sinne eines gewissen Prinzips seien. Als dieses Prinzip wähle ich das der kleinsten Quadratsumme, in Zeichen

$$\sum_{\lambda, A} [\lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} + \lambda_3 x_{3i} - A_i]^2 \quad \text{Minimum!},$$

wobei λ die Werte a bis g durchläuft, und A die Werte von A bis G . Nebenbei mag bemerkt werden, daß dieser Schritt durch eine nachträgliche Korrektur ergänzt werden muß. Man findet dann beispielsweise für das Individuum Nummer 43 der Urliste

$$x_{1;43} = 0,74, \quad x_{2;43} = -1,34, \quad x_{3;43} = -0,15$$

und hieraus

Übersicht 2

| | gemessen kg; cm; dl | theoretisch kg; cm; dl | Unterschied | |
|------------------|------------------------|---------------------------|-------------|---------------|
| | | | kg; cm; dl | % des Mittels |
| A Gewicht | 62 | 62 | 0 | 0 |
| B Länge | 169 | 169 | 0 | 0 |
| C Stammlänge | 88 | 89 | -1 | -1 |
| D Brustumfang | 86 | 86 | 0 | 0 |
| E Schulterbreite | 38 | 38 | 0 | 0 |
| F Hüftbreite | 33 | 33 | 0 | 0 |
| G Vitalkapazität | 32 | 34 | -2 | -6 |
| | | | | -7 absolut 7 |

Ich bemerke zur Erläuterung, daß es sich in dem als Beispiel herangezogenen statistischen Kollektiv um Körpermaße von jugendlichen männlichen Sportlern handelt, die mir von dem Direktor des Anthropologischen Instituts der Humboldt-Universität zu Berlin zur Verfügung gegeben worden sind. Ich habe aus dem Gesamtmaterial von etwa 3000 Karten zwecks Einschränkung der Rechenarbeit bei der zunächst notwendigen Entwicklung einer Methode 100 Karten herausgegriffen, ohne ein Auswahlprinzip, und aus ihnen die Abmessungen von 7 Eigenschaften herausgeschrieben.

Die Spalte „theoretisch“ der Übersicht 2 enthält die nach der Konstitutionstheorie berechneten Maße in kg, cm und dl, die nächste Spalte die Unterschiede und die letzte die Unterschiede in % der Mittelwerte der Gewichte und so weiter aller 100 Jungen. Beachtenswerte Abweichungen bestehen bei dem Jungen Nr. 43 nur bei der Stammlänge (-1% vom Mittelwerte der Stammlängen aller 100 Jungen) und bei der Vitalkapazität (-6% vom Mittelwerte der Vitalkapazitäten aller 100 Jungen). Der Junge Nr. 43 ist somit für seinen Teil mit im Durchschnitt 1% Abweichung der theoretischen Maße von den gemessenen im wesentlichen eine Bestätigung der Konstitutionstheorie.

Die gleichen Rechnungen wie für den Jungen Nr. 43 sind für alle 100 Jungen gemacht worden. Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werten ist am besten bei Stammlänge, Hüftbreite, Länge und Brustumfang, am schlechtesten bei der Vitalkapazität und danach, mit Abstand, beim Gewicht. Man wird nicht fehl gehen, wenn man den Grund dafür darin sucht, daß diese beiden Eigenschaften viel weniger nur Eigenschaften des Skeletts sind als die anderen fünf, und mag daraus den Schluß ziehen, in eine Konstitutionsanalyse nur solche Eigenschaften hereinzunehmen, die gewissen Homogenitätsforderungen genügen.

Weiterhin zeigt die Zusammenstellung, daß für 10 Jungen die Summe der absoluten prozentualen Abweichungen von den Mittelwerten sich gegenüber den andern sprunghaft erhöht, was als Zeichen dafür aufgefaßt werden kann, daß sie artfremd sind. Für die übrigen 90 betragen die durchschnittlichen absoluten Abweichungen der gemessenen Werte von den theoretischen in % der Mittelwerte

| | |
|----------------------|-------|
| bei C Stammlänge | 1,2% |
| F Hüftbreite | 1,2% |
| B Länge | 1,3% |
| D Brustumfang | 1,3% |
| E Schulterbreite | 2,0% |
| und erheblich mehr | |
| bei A Gewicht | 3,8% |
| und G Vitalkapazität | 5,0%. |

Die Möglichkeit der Absonderung bestimmter Individuen als artfremd kann für Tier- und Pflanzenzüchter von Nutzen sein.

Nachdem die Konstitutionsanalyse zu einem befriedigenden Ergebnis geführt hat, kann man 3 Eigenschaften als Grundeigenschaften auswählen und die Abmessungen der andern als Funktionen der Abmessungen der Grundeigenschaften darstellen. Wählt man zum Beispiel als Grundeigenschaften die Stammlänge (C), die Schulterbreite (E) und die Hüftbreite (F), dann folgt für alle Individuen

$$\begin{aligned}
 A_i &\sim 0,94 C_i + 0,80 E_i - 0,59 F_i \\
 B_i &\sim 1,03 C_i \quad \quad - 0,02 F_i \\
 D_i &\sim 1,39 C_i + 1,02 E_i - 1,39 F_i \\
 G_i &\sim 1,82 C_i \quad \quad - 1,12 F_i.
 \end{aligned}$$

Anschrift: Prof. Dr. P. LORENZ, Berlin-Schlachtensee, Kaiserstuhlstr. 21

Über das Testen von Verteilungshypothesen

Von HORAND STÖRMER*)

Gegeben sei eine Klasse von Verteilungsfunktionen

$$M_0 = \{F_x(t, \theta)\}$$

mit einem ein- oder mehrdimensionalen Parameter θ . (Eine solche Klasse bilden z. B. die Normalverteilungen mit dem Parameter $\theta = (\mu, \sigma)$.)

Weiter sei eine Grundgesamtheit vorgelegt, die nach der unbekannten Verteilungsfunktion $F_x(t)$ verteilt ist. Zu testen ist die Nullhypothese

$$H_0: F_x(t) \in M_0.$$

In einigen Fällen kann man folgendes zeigen:

Der Parameter θ habe die Dimension m . Ist dann $F_x(t) \in M_0$ und sind x_1, \dots, x_n ($n > m$) unabhängig voneinander nach $F_x(t)$ verteilte Zufallsgrößen, so gibt es $n - m$ von θ unabhängige Transformationen

$$y_v = f_v(x_1, \dots, x_n), \quad v = 1, \dots, n - m$$

der Art, daß die y_v unabhängig voneinander dieselbe normierte Verteilungsfunktion $F_x(t, \theta_0) \in M_0$ besitzen.

Die Nullhypothese läßt sich dann mit einer Stichprobe x_1, \dots, x_n prüfen, indem man den KOLMOGOROFF-Test bezüglich der Verteilungsfunktion $F_x(t, \theta_0)$ auf die Transformaten y_1, \dots, y_{n-m} anwendet.

Man bildet also zu den y_v die empirische Verteilungsfunktion $F_{n-m}(t)$ und verwirft H_0 dann und nur dann, wenn

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |F_{n-m}(t) - F_x(t, \theta_0)| > \varepsilon (n - m) \dots \dots \dots (1)$$

(mit geeignetem $\varepsilon (n - m)$) ist.

Unter welchen allgemeinen Voraussetzungen solche Transformationen existieren, ist bisher nicht geklärt.

Wenn sie existieren, so ist weiter zu untersuchen, ob der beschriebene Test (bzw. die Folge von Tests) gegenüber beliebigen einfachen Alternativhypothesen konsistent ist, wobei die Macht des Testes natürlich von der jeweiligen Alternativhypothese abhängt.

Der folgende Satz über empirische Verteilungsfunktionen liefert ein hinreichendes Kriterium für die Konsistenz:

Satz:

Es sei x_1, x_2, \dots eine abzählbar unendliche Folge von Zufallsgrößen, die unabhängig voneinander nach $F_x(t)$ verteilt sind. Weiter seien

$$\begin{aligned} &y_{11}; \\ &y_{21}, y_{22}; \\ &\vdots \\ &y_{n1}, \dots, y_{nn}; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Folgen von Zufallsgrößen. Zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ gebe es ein $\nu_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ der Art, daß

$$\begin{aligned} P \{ |y_{n\nu} - x_\nu| > \varepsilon_1 \} &< \varepsilon_2 \\ \text{für } \nu &\geq \nu_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Die $y_{n\nu}$ mögen also mit wachsendem ν nach Wahrscheinlichkeit gegen die x_ν konvergieren. Dann gilt:

Die aus den $y_{n\nu}$ gebildete empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(t) = \sum_{y_{n\nu} \leq t} \frac{1}{n} \quad \nu = 1, \dots, n$$

konvergiert an jeder Stetigkeitsstelle t_0 von $F_x(t)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen $F_x(t_0)$, d. h. zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon'' > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon', \varepsilon'', t_0)$ der Art, daß

$$\begin{aligned} P \{ |F_n(t_0) - F_x(t_0)| > \varepsilon' \} &< \varepsilon'' \\ \text{für } n &\geq n_0(\varepsilon', \varepsilon'', t_0). \end{aligned}$$

Der Beweis des Satzes soll an anderer Stelle dargestellt werden.

*) Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München.

Für die Konsistenz des beschriebenen Testes liefert er das folgende hinreichende Kriterium:

Der m -dimensionale Parameter θ sei durch m Momente eindeutig bestimmt und dadurch auch für jede Verteilung, deren entsprechende Momente existieren, eindeutig festgelegt.

Für die Klasse M_0 gelte: Es gibt eine Funktion $f_0(x, \theta)$ der Art, daß die Zufallsgröße x dann und nur dann einer Verteilungsfunktion aus M_0 genügt, wenn $f_0(x, \theta)$ der normierten Verteilungsfunktion $F_x(t, \theta_0)$ genügt. Liegt nun eine Verteilungsfunktion $F_x(t) \in M_0$ vor und existieren ihre den Parameter θ bestimmenden Momente, so strebt die Wahrscheinlichkeit für das Verwerfen von H_0 mit $n \rightarrow \infty$ gegen Eins, wenn die Transformaten y_ν mit $\nu \rightarrow \infty$ nach Wahrscheinlichkeit gegen $f_0(x_\nu, \theta)$ konvergieren. Dann hat nämlich die Verteilungsfunktion von $f_0(x, \theta)$ an einer Stetigkeitsstelle t_0 einen von $F_x(t_0, \theta_0)$ verschiedenen Wert a , und die empirische Verteilungsfunktion $F_{n-m}(t)$ konvergiert an dieser Stelle nach Wahrscheinlichkeit gegen a , woraus wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n-m) = 0$ die Behauptung folgt.

Anwendung:

Es sei M_0 die Klasse aller Normalverteilungen. Sind x_1, \dots, x_n ($n \geq 3$) unabhängig voneinander nach derselben beliebigen Verteilungsfunktion aus M_0 verteilt, so sind die neuen Zufallsgrößen

$$\text{mit } \left. \begin{aligned} y_\nu &= \frac{\sqrt{\nu} (x_{\nu+1} - \bar{x}_\nu)}{\sqrt{(\nu+1)(s_n^2 - \xi_n^2)}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} q_n \left(\frac{\xi_n}{s_n} \right), \quad \nu = 1, \dots, n-2 \\ \bar{x}_\nu &= \frac{1}{\nu} \sum_{\lambda=1}^{\nu} x_\lambda, \quad \xi_n = \frac{1}{n} (x_n - \bar{x}_{n-1}), \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\lambda=1}^n (x_\lambda - \bar{x}_n)^2 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

unabhängig voneinander nach $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx$ verteilt, wobei die Funktion $y = q_n(\tau)$ durch die eindeutige Beziehung

$$\frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda)} \int_0^{y^2} x^{\lambda-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{\tau} (1-x^2)^{\lambda-1} dx,$$

$$y \geq 0, \quad \lambda = \frac{n-2}{2}$$

erklärt ist. (Beweis an anderer Stelle.)

Für die Klasse der Normalverteilungen existiert also eine solche Transformation, die die Anwendung des KOLMOGOROFF-Testes erlaubt.

Um die Nullhypothese $F_x(t) \in M_0$ zu prüfen, bilde man aus den Stichprobenwerten x_1, \dots, x_n nach (2) die neuen Größen y_1, \dots, y_{n-2} und bestimme die zur geforderten statistischen Sicherheit S bzw. zum Sicherheitskoeffizienten $\alpha = 1 - S$ gehörige Schranke $\varepsilon(n-2)$ des KOLMOGOROFF-Testes. Die Nullhypothese wird dann und nur dann verworfen, wenn (1) mit $m=2$, $F_x(t, \theta_0) = \Phi(t)$ bzw. die gleichwertige Ungleichung

$$\max_{\nu} \left| \frac{2\nu-1}{2(n-2)} - \Phi(y_\nu) \right| > \varepsilon(n-2) - \frac{1}{2(n-2)}$$

erfüllt ist.

Die zu M_0 gehörige Funktion $f_0(x, \theta)$ ist

$$f_0(x, \theta) = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Um die Konsistenz des Testes gegenüber einer nicht normalen Verteilungsfunktion $F_x(t)$ mit existierender Streuung nachzuweisen, genügt es nach dem angegebenen Kriterium, nachzuweisen, daß die y_ν nach Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{x_\nu - \mu}{\sigma}$ konvergieren. Aus (2) erkennt man, daß dies erfüllt ist, wenn die Größe $\frac{1}{\sqrt{n-1}} q_n \left(\frac{\xi_n}{s_n} \right)$ nach Wahrscheinlichkeit gegen Eins konvergiert, und dies läßt sich zeigen (Beweis an anderer Stelle). Existiert die Streuung von $F_x(t)$ nicht, so läßt sich die Konsistenz ebenfalls leicht nachweisen.

Anschrift: Dr. HORAND STÖRMER, Großhesselohe bei München, Wettersteinstraße 17

Bemerkungen zu einem sequentiellen Versuchsplan

Von WALTER VOGEL

Wir leiten unter 1. einen einfachen Satz über gewisse MARKOFF-Prozesse her und wenden ihn im folgenden auf eine Strategie an, welche in [1] unter dem Namen S_1 eingeführt wurde. Es wird gezeigt, daß diese Strategie mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft das „falsche“ Experiment wählt.

1.

Seien X_k, Y_k und Z_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) unabhängige zufällige Größen. Die X_k (bzw. die Y_k , bzw. die Z_k) sollen alle die gleiche Verteilungsfunktion haben, und wir schreiben einfach X (bzw. Y , bzw. Z), wenn es nur auf diese Verteilung ankommt. Wir definieren den folgenden MARKOFF-Prozeß:

Sei $U_0 = 0$ und sei

$$U_{k+1} = U_k + \begin{cases} X_k & \text{falls } U_k > 0 \text{ ist,} \\ Y_k & \text{falls } U_k = 0 \text{ ist,} \\ Z_k & \text{falls } U_k < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Satz 1.1: Wenn man $t > 0$ und $\alpha < 1$ so finden kann, daß $E(e^{-tX}) \leq \alpha$, $E(e^{-tY}) \leq \alpha$ und $E(e^{-tZ}) \leq \alpha$ ist, so gilt $\sum_{k=0}^{\infty} P(U_k \leq 0) \leq (1 - \alpha)^{-1} < \infty$; d. h.: die Ungleichung $U_k \leq 0$ gilt mit Wahrscheinlichkeit 1 (m. W. 1) nur für endlich viele k .

Zusatz 1.2: Die Voraussetzung „für ein $t > 0$ gilt $E(e^{-tX}) \leq \alpha < 1$ “ ist erfüllt, wenn für $0 \leq t < T$ der Ausdruck $E(e^{-tX})$, existiert und $E(X) > 0$ ist.

Beweis von Satz 1.1: $E(e^{-tU_k})$ existiert immer (wenn wir auch $-\infty$ als Wert zulassen), und es gilt

$$\begin{aligned} E(e^{-tU_{k+1}}) &= E(e^{-t(U_k + X_k)} | U_k > 0) P(U_k > 0) + E(e^{-t(U_k + Y_k)} | U_k = 0) P(U_k = 0) \\ &\quad + E(e^{-t(U_k + Z_k)} | U_k < 0) P(U_k < 0) = E(e^{-tX}) E(e^{-tU_k} | U_k > 0) P(U_k > 0) \\ &\quad + E(e^{-tY}) E(e^{-tU_k} | U_k = 0) P(U_k = 0) \\ &\quad + E(e^{-tZ}) E(e^{-tU_k} | U_k < 0) P(U_k < 0) \leq \alpha E(e^{-tU_k}). \end{aligned}$$

Da $E(e^{-tU_0}) = 1$ ist, so folgt $E(e^{-tU_k}) \leq \alpha^k$. Die allgemeine TSCHEBYSCHEFF-Ungleichung liefert nun $P(U_k \leq 0) \leq E(e^{-tU_k})$, also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(U_k \leq 0) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = (1 - \alpha)^{-1}.$$

Nach dem BOREL-CANTELLI-Lemma hat dann das Ereignis „für unendlichviele k gilt $U_k \leq 0$ “ die Wahrscheinlichkeit Null.

Beweis des Zusatzes 1.2: Sei $m(t) = E(e^{-tX})$. Dann ist $\frac{dm(t)}{dt} = -E(X e^{-tX})$ und $\frac{d^2m(t)}{dt^2} = E(X^2 e^{-tX}) > 0$. Wegen $\frac{dm(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow 0} = -E(X) < 0$ folgt daraus $m(t_0) < m(0) = 1$ für passendes $t_0 > 0$.

2.

Gegeben seien zwei Zufallsexperimente, sie mögen A und B heißen. Dem Experiment A entspreche eine zufällige Größe mit der Dichte $f(x)$ und dem Experiment B entspreche eine zufällige Größe mit der Dichte $g(x)$ (beides Dichten bezüglich desselben Maßes μ). Es sei

$$\{x \mid f(x) > 0\} = \{x \mid g(x) > 0\}.$$

Es sollen unendlichviele Versuche gemacht werden, und zwar möglichst oft mit dem Experiment A . Das ist natürlich kein Problem, wenn man die beiden Experimente unterscheiden kann. Nun seien aber die Schilder mit den Buchstaben A und B , durch welche die Experimentier-
vorrichtungen zu unterscheiden waren, entfernt worden, und man weiß nicht mehr, welche der beiden Vorrichtungen nun dem Experiment A bzw. welche dem Experiment B entspricht. Es

werden zwei neue Schilder mit den Bezeichnungen I und II an die Experimentiervorrichtungen gehängt. Damit stehen zwei Hypothesen zur Diskussion.

$$H_1: I = A \quad \text{und} \quad II = B; \quad H_2: I = B \quad \text{und} \quad II = A.$$

Wir werden einen Versuchsplan (eine Strategie) angeben, bei dem man unter beiden Hypothesen m. W. 1 nur endlich oft als Experiment B wählt.

Sei $Z(x) = \log f(x) - \log g(x)$. Wir bezeichnen mit X_k (mit Y_k) unabhängige Realisationen von Experiment I (von Experiment II) und konstruieren den folgenden MARKOFF-Prozeß. Sei $U_0 = 0$ und sei

$$U_{k+1} = U_k + Z(X_k) \quad \text{falls} \quad U_k > 0 \quad \text{ist} \quad \dots \quad (2.1),$$

$$U_{k+1} = U_k - Z(Y_k) \quad \text{falls} \quad U_k < 0 \quad \text{ist} \quad \dots \quad (2.2).$$

Ist $U_k = 0$, so wähle man zwischen den Formeln (2.1) und (2.2) mit Wahrscheinlichkeiten $1/2, 1/2$. Man führt also bei jedem Schritt der Strategie ein Experiment durch, und zwar Experiment I , wenn $U_k > 0$, und Experiment II , wenn $U_k < 0$ ist. Ist $U_k = 0$, so entscheidet man sich mit Wahrscheinlichkeiten $1/2, 1/2$ für I oder II .

Wir wollen zeigen, daß unter H_1 die Voraussetzungen von Satz 1.1 (mit $t = 1/2$) erfüllt sind. Es ist

$$E(e^{-Z(X)/2}) = \int (f(x)g(x))^{1/2} d\mu = \alpha = E(e^{Z(Y)/2}).$$

Aus der SCHWARZSchen Ungleichung folgt

$$\alpha^2 = \left(\int (f(x)g(x))^{1/2} d\mu \right)^2 < \int f(x) d\mu \cdot \int g(x) d\mu = 1.$$

Hierbei steht ein echtes Kleiner-Zeichen, da f und g als Verteilungsdichten nicht proportional sein können, ohne identisch zu sein. Also gilt $\alpha < 1$.

Satz 1.1 sagt nun aus: M.W. 1 wird U_k nur endlich oft kleiner oder gleich Null sein, d. h. man wird m. W. 1 nur endlich oft das Experiment II , also B , wählen.

Unter H_2 drehen sich alle Verhältnisse genau um, und man findet (indem man den Satz 1.1 auf $-U_k$ anwendet), daß diesmal die Ungleichung $U_k \geq 0$ m. W. 1 nur endlich oft eintritt; man wird also unter H_2 m. W. 1 nur endlich oft das Experiment I , also B , wählen.

Bei der praktischen Durchführung einer solchen Strategie sind im allgemeinen die Wahrscheinlichkeitsdichten f und g nicht genau bekannt. Wir nehmen an, daß man sich für ein Paar f_0, g_0 entschieden hat, d. h. daß man mit $Z_0(x) = \log f_0(x) - \log g_0(x)$ arbeiten will. Die wahren Dichten seien f und g . Solange die Ungleichungen

$$\int Z_0(x) f(x) d\mu > 0 \quad \text{und} \quad \int Z_0(x) g(x) d\mu < 0 \quad \dots \quad (2.3)$$

gelten, und die Ausdrücke $\int e^{-tZ_0(x)} f(x) d\mu$ und $\int e^{tZ_0(x)} g(x) d\mu$ für $0 \leq t < T$ existieren, wird auf Grund der Strategie das Experiment B (die zufällige Größe mit der Dichte g) m. W. 1 nur endlich oft ausgeführt. Dies folgt sofort aus dem Zusatz 1.2 zusammen mit Satz 1.1. Die Strategie liefert also gute Ergebnisse nicht nur für das Paar f_0, g_0 , sondern auch für alle Paare f, g , welche von f_0 und g_0 genügend wenig abweichen.

3.

3.1: Die Experimente A (mit der Dichte f_0) und B (mit der Dichte g_0) seien normal verteilt mit gleicher Varianz σ^2 und den Mittelwerten μ_0 bzw. ν_0 ($\mu_0 > \nu_0$). Dann wird $Z_0(x) = (\mu_0 - \nu_0)x/\sigma^2 - (\mu_0^2 - \nu_0^2)/2\sigma^2$. Da wir nur wissen wollen, ob $U_k > 0$, $U_k = 0$ oder $U_k < 0$ ist, so dürfen wir Z_0 mit einem positiven Faktor multiplizieren. Multipliziert man mit $\sigma^2/(\mu_0 - \nu_0)$, so erhält man die folgende Strategie:

Sei $(\mu_0 + \nu_0)/2 = m$ und $U_0 = 0$. Wenn $U_k > 0$ ist, so setze man $U_{k+1} = U_k + X_k - m$ (wobei X_k durch das Experiment I gewonnen wird), wenn $U_k < 0$ ist, so setze man $U_{k+1} = U_k - Y_k + m$ (wobei Y_k durch das Experiment II gewonnen wird). Wenn $U_k = 0$ ist, so entscheide man sich mit Wahrscheinlichkeiten $1/2, 1/2$ für einen der beiden Schritte. Auf diese Weise wird man m. W. 1 nur endlich oft das Experiment B (mit der Dichte g_0) ausführen. Zur Durchführung der Strategie braucht man also nur $m = (\mu_0 + \nu_0)/2$ zu kennen. Führt man die Strategie mit einem vorgegebenen Wert m durch, sind μ und ν die wahren Mittelwerte, und ist $\mu > m > \nu$, so folgt aus den Formeln (2.3), daß m. W. 1 das Experiment mit dem kleineren Mittelwert nur endlich oft ausgeführt wird.

3.2: A und B seien BERNOULLI-verteilt und zwar sei: $A: f(x) = p^x (1-p)^{1-x}$ und $B: g(x) = q^x (1-q)^{1-x}$ ($x = 0, 1$). Durch ähnliche Überlegungen wie beim vorigen Beispiel findet man die folgende Strategie. Sei $U_0 = 0$, sei $U_{k+1} = U_k + X_k - c$ falls $U_k > 0$ ist, und sei $U_{k+1} = U_k - Y_k + c$ falls $U_k < 0$ ist. Die X_k sollen dem Experiment I entsprechen und die Y_k

dem Experiment II. Immer, wenn $p > c > q$ ist, wird m. W. 1 das Experiment B nur endlich oft ausgeführt werden. Den Dichten f_0 und g_0 in Formel (2.3) entsprechen dabei Werte p_0 und q_0 , für welche $c = \log \frac{1-p_0}{1-q_0} / \log \frac{p_0(1-q_0)}{q_0(1-p_0)}$ ist.

Der Sonderfall $c = 1/2$ wurde in [2] bereits ausführlich behandelt.

3.3: Wir wollen nun annehmen, daß das Experiment A den größeren Erwartungswert liefert. Es sei also $\int x f(x) d\mu = p > q = \int x g(x) d\mu$. Es werden n Versuche gemacht, in der Absicht, den Erwartungswert der Summe aller Auskommen möglichst groß zu halten. Sei E_k der Erwartungswert für das Auskommen des k -ten Versuches. Unter der Hypothese H_1 folgt aus dem Versuchsplan sofort die Formel

$$E_k = p \left(P(U_{k-1} > 0) + \frac{1}{2} P(U_{k-1} = 0) \right) + q \left(P(U_{k-1} < 0) + \frac{1}{2} P(U_{k-1} = 0) \right).$$

Also wird

$$\sum_{k=1}^n E_k = n p - (p - q) \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(U_k < 0) + \frac{1}{2} P(U_k = 0) \right).$$

Führt man wie in [2], [3] und [4] das Risiko $R_n = n p - \sum_{k=1}^n E_k$ ein, so erhält man

$$R_n = (p - q) \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(U_k < 0) + \frac{1}{2} P(U_k = 0) \right).$$

Satz 1.1 liefert die Abschätzung

$$R_n \leq (p - q) (1 - \alpha)^{-1} \quad \text{mit} \quad \alpha = \int (f(x) g(x))^{1/2} d\mu \quad \dots \quad (3.1).$$

Ferner folgt die Beziehung

$$n^{1-\varepsilon} \left(p - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k \right) \rightarrow 0 \quad \text{für jedes} \quad \varepsilon > 0 \quad \dots \quad (3.2).$$

Man überzeugt sich leicht, daß (3.1) und (3.2) auch unter der Hypothese H_2 gelten. (3.2) wurde mit $\varepsilon = 1$ schon in [1] bewiesen.

Führt man den Versuchsplan mit Z_0 durch und gelten für die wahren Dichten f und g die Ungleichungen (2.3), so gilt wiederum (3.2). Ferner ist dann $R_n < C$, wobei C von f, g, f_0 und g_0 (aber nicht von n) abhängt.

3.4: Wir wollen zum Abschluß den Zusammenhang zwischen der hier beschriebenen Strategie und der Strategie S_1 aus [1] herstellen. In [1] wird die Kenntnis einer a priori-Wahrscheinlichkeit für die Hypothese H_1 vorausgesetzt. Diese a priori-Wahrscheinlichkeit ändert sich (nach der BAYESSchen Formel) von Versuch zu Versuch. Vor dem k -ten Versuch heiße sie ξ_k . Man wählt dann beim k -ten Versuch dasjenige Experiment, welches unter ξ_k den größeren Erwartungswert hat. Setzt man $\xi_1 = 1/2$ und $\log \xi_k (1 - \xi_k)^{-1} = U_{k-1}$, so kommt man zu dem hier beschriebenen Verfahren.

Literatur

- [1] R. N. BRADT, S. M. JOHNSON and S. KARLIN, On sequential designs for maximising the sum of n observations, Ann. Math. Stat. **27** (1956), p. 1060—1074.
- [2] WALTER VOGEL, Ein Irrfahrtenproblem und seine Anwendung auf die Theorie der sequentiellen Versuchspläne, Archiv d. Math. **XI** (1960), S. 310—320.
- [3] WALTER VOGEL, A sequential design for the two armed bandit, Ann. Math. Stat. **31** (1960), p. 430—443.
- [4] WALTER VOGEL, An asymptotic minimax theorem for the two armed bandit problem, Ann. Math. Stat. **31** (1960), p. 444—451.

Anschrift: Dozent Dr. WALTER VOGEL, Tübingen, Hennentalweg 25

F. UNTERNEHMENSFORSCHUNG

Die Anwendung des elektronischen Analogrechners in der linearen Optimierung

Von J. HEINHOLD

1. Einleitung

Bei der linearen Optimierung ist eine lineare Funktion von n unabhängigen nichtnegativen Veränderlichen

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \cdot x = \sum_{v=1}^n c_v x_v \quad \dots \dots \dots (1),$$

die sog. „Zielfunktion“, unter einschränkenden linearen Bedingungen

$$L_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) + b_\mu \geq 0, \quad L_\mu = a_\mu \cdot x = \sum_{v=1}^n a_{\mu v} x_v, \quad \mu = 1, \dots, m \quad \dots \dots (2)$$

zu einem Maximum (bzw. Minimum) zu machen. Zur Lösung umfangreicher Aufgaben dieser Art, also bei großen n und m , ist zweifellos der elektronische Digitalrechner das geeignetste Rechenhilfsmittel. Trotzdem kann bei nicht zu umfangreichen Aufgaben dieser Art mit Erfolg der elektronische Analogrechner eingesetzt werden, besitzt er doch eine Reihe typischer Eigenschaften, die sich bei der Optimierung besonders vorteilhaft auswirken. Eine solche ist zunächst die große, vom Umfang des Problems unabhängige Rechengeschwindigkeit, die auch die Durchführung komplizierterer Aufgaben in wenigen Sekunden ermöglicht, ferner die Möglichkeit Parameter in einfacher Weise durch Drehung von Potentiometern zu verändern und damit den Einfluß solcher Änderungen auf das Resultat unmittelbar zu untersuchen. Schließlich bietet auch der Fall, daß die Koeffizienten selbst Funktionen der Zeit sind, also die dynamische Programmierung oder der Fall nichtlinearer Funktionen und Bedingungen keine wesentliche Steigerung der Schwierigkeit. Zudem wird bei vielen Aufgaben der Praxis, etwa bei betriebswirtschaftlichen Fragen, die auf dem Analogrechner erzielbare Genauigkeit der Genauigkeit der Ausgangsdaten durchaus angepaßt sein, so daß man, wenn die Kapazität der Anlage ausreicht, sogar den Analogrechner dem Digitalrechner vorziehen wird.

2.

Die für die lineare Optimierung auf dem Analogrechner zur Verfügung stehenden Verfahren sind wesentlich anderer Natur als die für Digitalrechner geeigneten. Wir haben hier wieder ein typisches Beispiel für die bekannte Tatsache, daß das Rechenhilfsmittel weitgehend die Art des mathematischen Verfahrens bestimmt. So ist das für den Digitalrechner zweckmäßige Simplexverfahren und seine Modifikationen algebraischer Natur. Für den Analogrechner hingegen verwendet man ein analytisches Verfahren, gemäß der Eigenart dieses Rechengengerätes, nämlich die Lösung eines Anfangswertproblems für ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für $x_v(t)$, ($v = 1, \dots, n$), in Vektorschreibweise mit $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\dot{x} = \vartheta(x), \quad \left(\dot{x} = \frac{d}{dt} x \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

unter der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 \quad \dots \dots \dots (4).$$

Man betrachtet also eine Bewegung des Punktes x im R_n , wobei $\vartheta(x)$ so zu wählen ist, daß die Bewegung, ausgehend von einem beliebigen Punkt x_0 in dem auf dem Rande des durch (2) definierten zulässigen Bereiches \mathcal{M} gelegenen Zielpunkt x^* , in dem $Z(x)$ sein Maximum (Minimum) annimmt, endet.

3.

Als erster hat 1956 PYNÉ [1] für Analogrechner ein derartiges Verfahren zur linearen Optimierung angegeben. Er verwendet in unserer Bezeichnung die folgende Bewegungsgleichung:

$$\dot{x} = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu a_\mu + \varepsilon \operatorname{grad} Z, \quad \text{mit} \quad \lambda_\mu = \begin{cases} 0 & \text{für } a_\mu x + b_\mu \geq 0 \\ 1 & \text{für } a_\mu x + b_\mu < 0 \end{cases} \quad \dots \dots (5).$$

ε ist eine von PYNÉ noch geeignet gewählte Konstante. In \mathfrak{M} bewegt sich $x(t)$ mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{x} = \varepsilon \text{ grad } Z = \varepsilon c$, also in Richtung des stärksten Anstiegs (Abstiegs). Sobald x den zulässigen Bereich \mathfrak{M} verläßt, überlagern sich dieser Geschwindigkeit die nach \mathfrak{M} zurückweisenden Geschwindigkeitsvektoren a_μ der von $x(t)$ überschrittenen Hyperebenen \mathfrak{E}_μ . Betrachten wir zunächst nur eine Hyperebene \mathfrak{E}_μ , welche ein Randstück von \mathfrak{M} enthält und setzen voraus, daß ausgehend von einem Punkt x_0 aus \mathfrak{M} $x(t)$ auf einen derartigen Randpunkt R gelangt ist, so wird $x(t)$, falls die Normalkomponente von $\varepsilon \text{ grad } Z$ zu \mathfrak{E}_μ kleiner als der Betrag von a_μ ist,

$$|\varepsilon \cdot \text{grad } Z \cdot a_\mu| < a_\mu^2, \quad \text{also} \quad \varepsilon < \frac{a_\mu^2}{|a_\mu \text{ grad } Z|} \quad \dots \dots \dots (6),$$

der Punkt $x(t)$ nach Überschreiten des Randes wieder nach \mathfrak{M} zurückgeworfen usw. Er wird sich, wenn er nicht ausbricht, infinitesimal in der in Bild 1 skizzierten Weise in der von den Vektoren $\text{grad } Z$ und a_μ in R gebildeten Ebene auf \mathfrak{E}_μ bewegen, also in Richtung der Projektion von $\varepsilon \text{ grad } Z$ auf \mathfrak{E}_μ mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Projektion von $\varepsilon \text{ grad } Z$ auf \mathfrak{E}_μ ist. PYNÉ wählt ε so, daß

$$\varepsilon < \text{Min}_{\mu=1, \dots, m} \frac{a_\mu^2}{|a_\mu \text{ grad } Z|} \quad \dots \dots \dots (7).$$

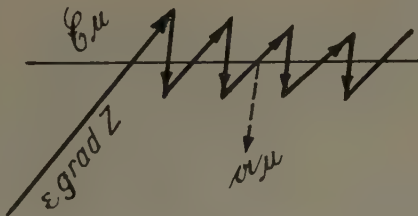


Bild 1

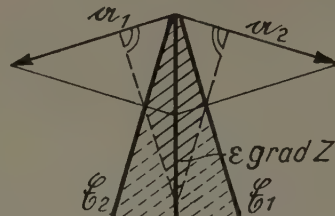


Bild 2

Diese Bedingung kann aber offensichtlich das Ausbrechen von $x(t)$ aus dem zulässigen Bereich \mathfrak{M} und das Weglaufen nicht in jedem Falle verhindern, denn es kann, wie schon beim zweidimensionalen Problem an einer spitzen Ecke E ersichtlich ist (Bild 2) die Bedingung (7) erfüllt, aber trotzdem $|\varepsilon \text{ grad } Z| > |a_1 + a_2|$ sein, also $x(t)$ nach $\overline{\mathfrak{M}}$ ausbrechen.

4.

JACKSON [2] verwendet daher anstelle von (5) die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -K \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu (L_\mu + b_\mu) a_\mu + \varepsilon \text{ grad } Z \quad \dots \dots \dots (6),$$

wobei K eine zunächst groß genug zu wählende, ε eine kleine Konstante ist, so daß in jedem Falle nach Überschreiten der Hyperebene \mathfrak{E}_μ , wenn somit $L_\mu + b_\mu < 0$ geworden ist, eine Zurückbewegung auf \mathfrak{E}_μ hin erfolgt, allerdings, da $\varepsilon > 0$ ist, nur bis in die Nähe von \mathfrak{E}_μ und es wird bei geeigneten Werten von K und ε der gesuchte Zielpunkt zunächst durch den Endpunkt der Bewegung nur angenähert. Diese Annäherung wird jedoch, wenn nunmehr noch ε verkleinert wird, immer besser, da $L_\mu + b_\mu$ in der Nähe von \mathfrak{E}_μ nur noch klein ist und daher den von \mathfrak{E}_μ stammenden Geschwindigkeitsvektor a_μ mehr und mehr tilgt. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird der Endpunkt der Bewegung in den gesuchten Zielpunkt übergehen. Wegen der erforderlichen Wahl geeigneter Werte von K und ε ist das Verfahren mehr experimenteller Natur. Mathematisch bleibt für den allgemeinen Fall noch die Konvergenz zu beweisen.

5.

Es sei daher eine an meinem Institut entwickelte und erprobte¹⁾ Methode angeführt, die in jedem Falle ohne weitere Maßnahmen zum Ziele führt und für die auch mathematisch der Konvergenzbeweis erbracht werden kann.

¹⁾ Hierfür fand ein von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellter Analogrechner der Firma Telefunken Verwendung.

Wir verwenden die Bewegungsgleichung

$$\dot{x} = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} a_{\mu} + \delta c \quad \dots \dots \dots (8)$$

mit

$$\lambda_{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{\mu} x + b_{\mu} > 0 \\ 1 & \text{falls } a_{\mu} x + b_{\mu} < 0 \end{cases} \quad \text{ist}$$

und mit

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} > 0 \\ 1 & \text{falls } \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} = 0 \end{cases} \quad \text{ist.}$$

Hierdurch ist \dot{x} zunächst für den Fall, daß $x(t)$ nicht auf einer Hyperebene liegt, definiert. Im Innern des zulässigen Bereichs \mathcal{M} haben wir die konstante Geschwindigkeit

$$\dot{x} = c = \text{grad } Z \quad \dots \dots \dots (8a),$$

befindet sich $x(t)$ im Komplementärbereich $\overline{\mathcal{M}}$ von \mathcal{M} außerhalb einer Hyperebene, so wirkt nur die aus den Normalvektoren a_{μ} der „überschnittenen“ Hyperebenen resultierende Geschwindigkeit

$$\dot{x} = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu} a_{\mu} \quad \dots \dots \dots (8b).$$

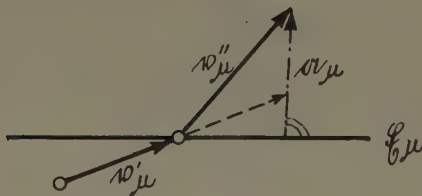


Bild 3

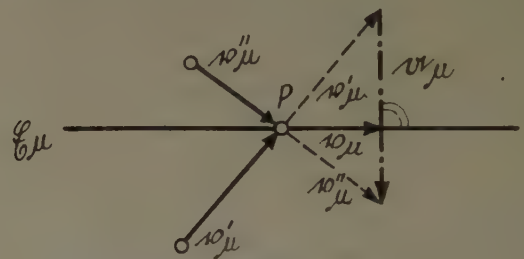
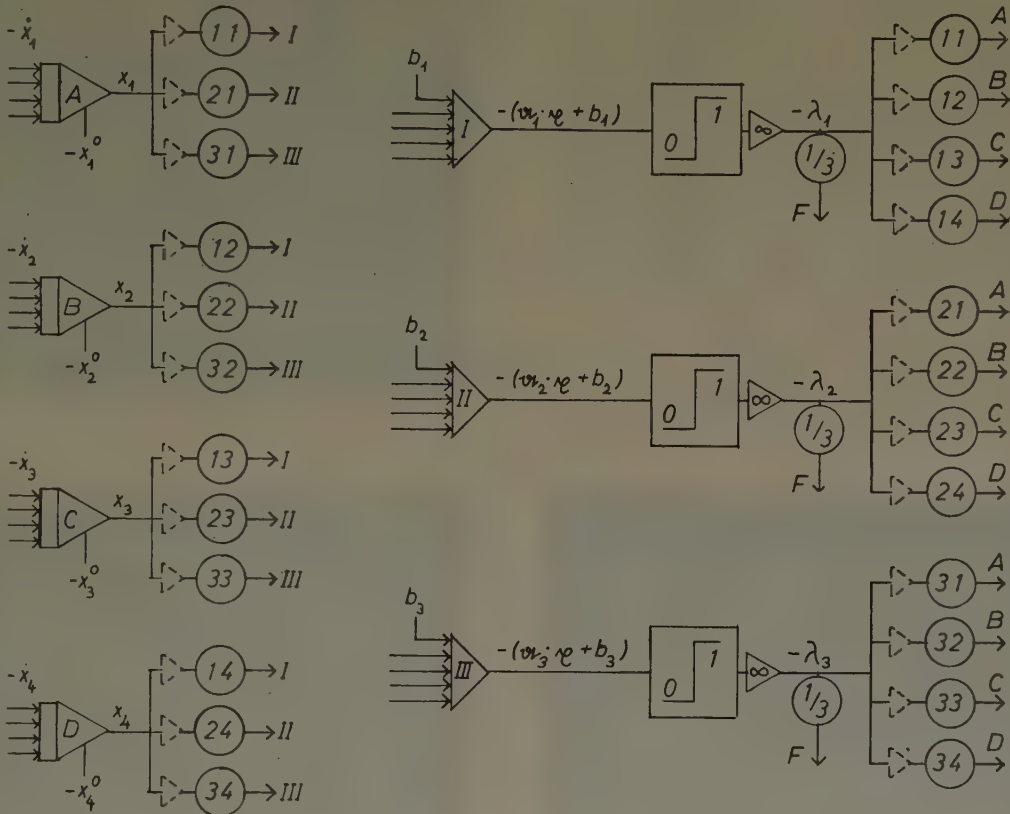


Bild 4

Es bleibt noch die Geschwindigkeit zu definieren für den Fall, daß $x(t)$ auf einer oder mehreren Hyperebenen liegt. Die Grundlage hierfür bildet das folgende reale Verhalten des Analogrechners bei Erreichen einer einzelnen Hyperebene \mathcal{E}_{μ} : Erreicht $x(t)$ einen Punkt von \mathcal{E}_{μ} und weisen die in der Umgebung von P auf beiden Seiten der Hyperebene \mathcal{E}_{μ} vorhandenen Geschwindigkeitsvektoren v'_{μ} und v''_{μ} in P angetragen nach derselben Seite von \mathcal{E}_{μ} , so durchstößt x die Ebene \mathcal{E}_{μ} , theoretisch unter sprunghafter Änderung seiner Geschwindigkeit von v'_{μ} auf $v''_{\mu} = v'_{\mu} + a_{\mu}$. Zeigen jedoch die in P angetragenen Vektoren v'_{μ} und v''_{μ} nach verschiedenen Seiten von \mathcal{E}_{μ} , so bewegt sich $x(t)$ bis zum Erreichen einer neuen Hyperebene mit der Geschwindigkeit v_{μ} , die, — da a_{μ} der Normalenvektor von \mathcal{E}_{μ} ist — gleich der Projektion einer der beiden Vektoren v'_{μ} und v''_{μ} ist, auf der Hyperebene weiter (Bilder 3 und 4). Hiervon ausgehend kann man auch Punkten, in denen mehrere Hyperebenen zusammentreffen in eindeutiger Weise eine Geschwindigkeit $x(t)$ zuordnen. Diese Definition erfolgt rekursiv und ist, da man alle Möglichkeiten, die im R'_n auftreten können, zu berücksichtigen hat, relativ kompliziert. Ich kann daher hier nur auf eine demnächst gemeinsam mit meinem Mitarbeiter K. H. KUNTZE zu veröffentliche Arbeit hinweisen, in der auch der Beweis erbracht wird, daß bei der dort zugrunde gelegten Definition der Geschwindigkeit auf den Hyperebenen die Bewegung $x(t)$ von einem beliebigen x_0 ausgehend falls \mathcal{M} nicht leer ist, in endlicher Zeit in dem gesuchten Zielpunkt x^* zum Stillstand kommt. Tritt eine solche Ruhelage nicht ein, so kann man andererseits folgern, daß \mathcal{M} leer, also die einschränkenden Bedingungen in sich widerspruchsvoll sind.

Da die gewählte Definition der Geschwindigkeit auf Hyperebenen weitgehend das reale Verhalten des Analogrechners, mathematisch idealisiert, wiedergibt, muß sie im Programm nicht besonders berücksichtigt werden. Dieses braucht daher lediglich die Bewegungsgleichung (8) darzustellen. Es ist in Bild 5 für $n = 4$, $m = 3$ angegeben. Da die Bedingungsgleichungen (2) lediglich zur Steuerung der Sprungfunktionen dienen, ist auch ein Überlaufen der Größen $a_{\mu} x + b_{\mu}$ zulässig, dasselbe gilt für die Steuergröße von δ , was die Programmierung wesentlich vereinfacht. Ein Überlauf an einem Integrator für x , bewirkt nur das Hinzutreten der Bedingung $|x_v| \leq 1$, also eine Einschränkung von \mathcal{M} . Diese ist, falls die Koordinaten des Zielpunktes x^* dem Betrag nach sämtlich 1 nicht überschreiten, für das Verfahren ohne Bedeutung.

Im Folgenden sei das Funktionieren des Verfahrens an einem einfachen Beispiel demonstriert. Wir wählen dabei nur zwei Veränderliche, um das Ergebnis unmittelbar am Sichtgerät (Oszillograph) registrieren zu können, andererseits eine relativ große Zahl von $m = 12$ Bedingungen um das Zusammenwirken vieler Sprungfunktionen zu erproben.



$$(ik) = |a_{ik}|; \quad \text{— nur für } a_{ik} \leq 0; \quad \text{Anfangswerte für } t=0: \quad x_k(0) = x_k^0$$

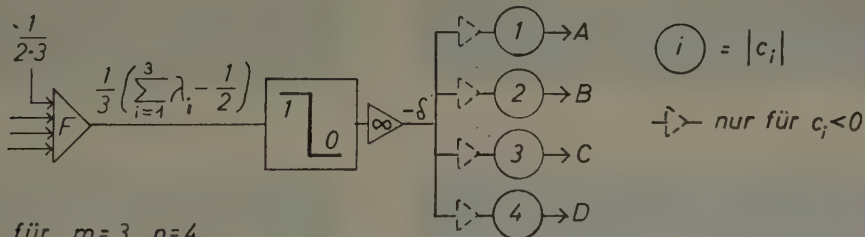
Schaltung für $m=3, n=4$

Bild 5

Beispiel: Gesucht ist das Maximum von $Z = \alpha x + y$ unter den Bedingungen (siehe Bild 6):

$$\begin{aligned} -y + 1 &\geq 0; & -y - x + 1 &\geq 0; & -y - 1,275x + 1,02 &\geq 0; \\ -y - 1,79x + 1,13 &\geq 0; & -y - 2,6x + 1,37 &\geq 0; & -y - 4,8x + 2,2 &\geq 0; \\ -x + 0,44 &\geq 0; & y - 4,8x + 2,2 &\geq 0; & y - 2,6x + 1,37 &\geq 0; \\ y - 1,79x + 1,13 &= 0; & y - 1,275x + 1,02 &\geq 0; & y - x + 1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß in jedem Falle, gleichgültig von welchem Punkt in \mathcal{M} oder $\overline{\mathcal{M}}$ wir ausgehen, $\mathbf{r}(t)$ auf den Rand von \mathcal{M} zuläuft und im Zielpunkt \mathbf{r}^* , indem die Zielfunktion ihr Maximum annimmt, zur Ruhe kommt. In den Aufnahmen ist dieser Punkt durch eine stärkere Belichtung gekennzeichnet. In Bild 7 gehen wir bei gleicher Zielfunktion von verschiedenen in \mathcal{M} gelegenen Punkten \mathbf{r}_0 aus und gelangen in jedem Falle zu demselben Zielpunkt. In Bild 8 sind für $\alpha = 1$ verschiedene Anfangspunkte \mathbf{r}_0 in \mathcal{M} gewählt. Hier ergibt sich stets $(0; 1)$ als Zielpunkt. Bild 9 zeigt den Verlauf von $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ für $\alpha = 1$ und $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, Bild 10 den Weg von $\mathbf{r}(t)$ für $\mathbf{r}_0 = (-1; -1)$ bei verschiedenen Werten von α und die zugehörigen

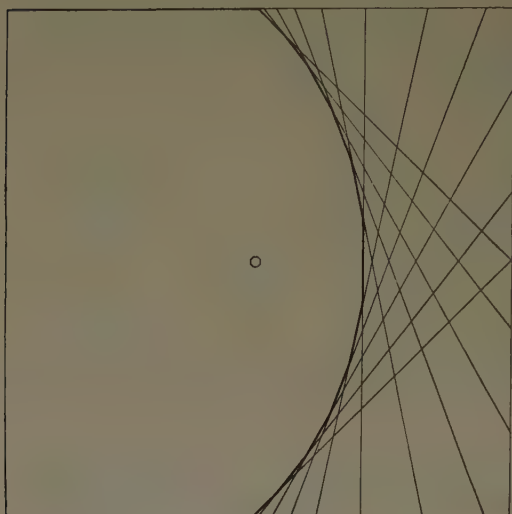


Bild 6



Bild 7



Bild 8



Bild 9

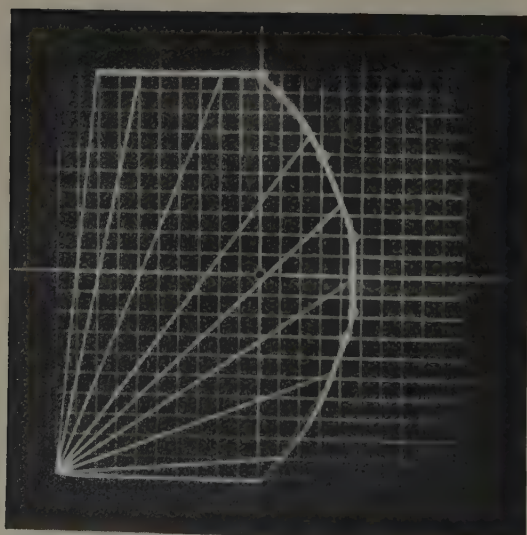


Bild 10

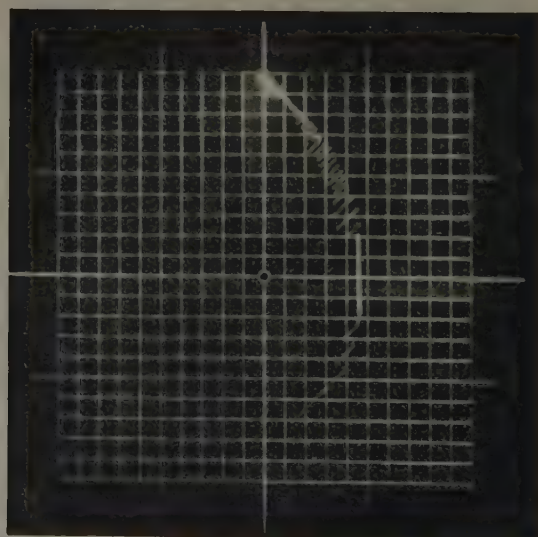


Bild 11

Zielpunkte. In Bild 11 ist die Rechengeschwindigkeit extrem groß gewählt, so daß die zur Erzeugung der Sprungfunktionen verwendeten Komparatoren nicht so rasch umschalten können. Es zeigt sich dann der in Bild 1 skizzierte Effekt: Der Punkt $z(t)$ tritt in Richtung von grad Z etwas über den Rand von \mathfrak{M} hinaus und wird in der jeweiligen Richtung a_μ wieder nach \mathfrak{M} zurückgeworfen usw. Die in dem Beispiel gewählte Beschränkung auf $n = 2$ ist für die Schaltung unwesentlich. Man wird im allgemeinen Falle $x_\nu(t)$ für $\nu = 1, \dots, n$ und $Z(t)$ über der t -Achse aufzeichnen lassen und erhält am Oszillographen von einem bestimmten $t \geq t^*$ an die gesuchten Koordinaten x_ν^* und den zugehörigen Wert der Zielfunktion.

Will man die Genauigkeit der erhaltenen Werte weiter verbessern, so kann man den zunächst erhaltenen Zielpunkt z_0^* in den Nullpunkt verschieben, die Maßstäbe der Größen x_ν und Z entsprechend vergrößern (was ohne wesentliche Änderung des Programms durch Neueinstellung der Potentiometer erfolgen kann), die Rechengeschwindigkeit geeignet verkleinern und nötigenfalls die Ungleichungen (2) mit passenden Konstanten multiplizieren. Man erhält dann von $z_0 = 0$ ausgehend einen neuen Zielpunkt z^* und damit die genauere Lage $z_1^* = z_0^* + z^*$ des Zielpunktes und kann durch Wiederholung des Verfahrens die Genauigkeit der Ergebnisse weiter erhöhen.

Literatur

- [1] INSLEY P. PYNE, Linear Programming on an Electric Analogue Computer, Trans. Am. Inst. Electr. Eng. 75 (1956), S. 139—143.
- [2] ALBERT S. JACKSON, Analog Computation, New York 1960, S. 357ff.

Anschrift: Prof. Dr. J. HEINHOLD, München-Solln, Irmgardstr. 15

Tendances actuelles de la recherche opérationnelle dans l'industrie et pour les collectivités

Present trends of operations research applied to industry and collectivities*)

By CH. SALZMANN

Introduction

I have to speak about the trends of Operations Research in the Industrial World and I think that the best way for me to give you a good outlook of the present applications of O.R. is to describe shortly some of the various studies which we have made lately. But, first, I will try to make clear, some of the reasons of the increasing success of O. R. in the business world, and, also the reasons which have, in some way, slowed down this upward trend.

The increasing complexity of human organizations due to the industrial revolution has brought increasing difficulties into the management problems. The top executive to-day knows he is heading a complex organization with not only equipment whose technology exceeds his knowledge, but also men with various abilities: accountants, controllers, specialized workers, engineers, marketing and financial teams, etc. . . .

In a world in constant evolution, in a market changing along with the techniques and highly competitive, he knows that he must take every day, numerous decisions which are mostly not based on a sound study of their possible consequences. He knows that he has neither the time nor the staff to undertake the preliminary investigations of the operations he is controlling and he is ready to favour the enlightenment that an O.R. team, scientifically objective in taking decision, may give him.

It is a very hard task to present to mathematicians or to industrialists, a consistent picture of our subject when few people have yet agreed on how to define it. When one says that it helps to save money, to increase output, to economize in capital investment, manpower and equipment, or that it is the science of decision, or even a scientific approach to problems which have been solved, up to now, purely by intuition or routine, you cannot prevent many business people from thinking that O.R. is nothing but a new name for an old management technique, and from wondering how O.R. may be able to help them to solve problems with which they have dealt for so many years.

I shall propose the following definition:

"O.R. is a scientific approach to human operations. By operations, I mean organized human activities that involve together men, machines and plans".

I shall try, by this conference, to make that last definition clear, and illustrate it by example of applications.

*) Auf Einladung der Tagungsleitung gehaltener Hauptvortrag.

One can distinguish three broad classes of problems; this differentiation being based on the scope of the problems, the level of decisions which are involved and the techniques used (Fig. 1).

| | SCOPE | LEVEL OF DECISIONS | TECHNIQUES USED |
|----------------------------|---|--------------------|------------------------------|
| PROCESSING STUDIES | Infraenterprise (i. e. production level) | Tactics | Mathematical Optimization |
| CHOICE OF INVESTMENTS | Top Management Level | Strategics | Economical mapping of future |
| STUDIES FOR COLLECTIVITIES | Cities States Nations | Politics | Mix-scientific Approach |

Fig. 1

The first class that I call "Processing Studies" refers to problems of production. Then I will deal with problems of "Choice of Investment" and finally with problems of "Collectivities" involving decisions at the national or regional level.

I. Processing Studies

In the "Processing Studies" we will find all the problems which have to deal with existing systems such as a set of facilities through which an industrial process may be completed in various ways. Such systems are often very complicated. They involve many variables and constraints and finding the optimum operating conditions has been for many years considered typically the task of O.R. techniques. As a first example, I will describe briefly a study which we have made for the "Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine" (S.N.P.A.).

This society had to process the natural gas which had been found at Laco in the South West of France. An aspect of the problem to be studied was the determination of the most economic rate of operations for the whole power plant, given such factors as:

- Refinery power requirements in steam
- Characteristics of turbo generating sets
- Cost of steam production
- Cost of electricity when bought from outside supplies.

A mathematical model was constructed to represent the power plant's operations.

The building of a model, in this instance, proved its versatility and usefulness as a tool for management facing complex decisions. We were able to give SNPA a tool easy to use which will indicate what should be the best equipment to use, given the final operating level and indicate how the power plant should be operated in order to get the minimum cost. This estimated minimum cost, once computed, can be useful for checking current costs. It was shown that if a merely intuitive approach instead of the present one had been taken, the annual operating costs at full capacity for the power plant would have been 7 to 10 per cent higher, on \$ 2.000.000/year of operating costs.

Another study that I would mention because of the large dimension of the operations and of the money involved, has been done for a fully integrated Steel Plant.

This plant could be described schematically as a succession of production center or departments such as: coke oven plant, blast furnaces, steel plant, mills, etc. . . . According to the market demand of finished product, production requirements were set up for each Department by a Central Planning and Control Center. Such requirements had to be determined taking into account:

- . the yield known in terms of probabilities
- . the plant capacity limited not only by existing facilities but also by breakdowns occurring randomly
- . the cost of production as a function of the level of output
- . the cost of keeping inter-processes inventories
- . etc. . . .

An economical model was build up enabling to schedule according to the market demand, the production level of each department which maximize the over all profit of the firm.

To end up with the first class of problems, I would like to make some remarks about the approach which has to be taken in solving mathematical models describing such systems. A mathematical model is simply a set of functionnal relations that enable response functions to be

calculated rather than measured. Sometime the problem of maximizing or minimizing a response function $R = f(X_1, X_2, \dots)$ where the X are several controllable variables which can to some extent be varied, may be handled by conventional or formal mathematical methods, but in any case the mathematical solution is impractical, and the approach to the problem must be experimental. Then the use of powerful computer enables us to realize this experimental approach by simulating a system by a model and making extensive computations for numerous value of the variables.

II. Choice of Investments

I am going now to speak about a second category of problems that I have named "Choice of Investments".

OR strategic decisions: These are problems with which the management have to cope every day. It may be as well the choice of a new product to be produced, as for example, the determination for a car manufacturer of the best car to be designed according to the taste of people, income, price of gas and so on...

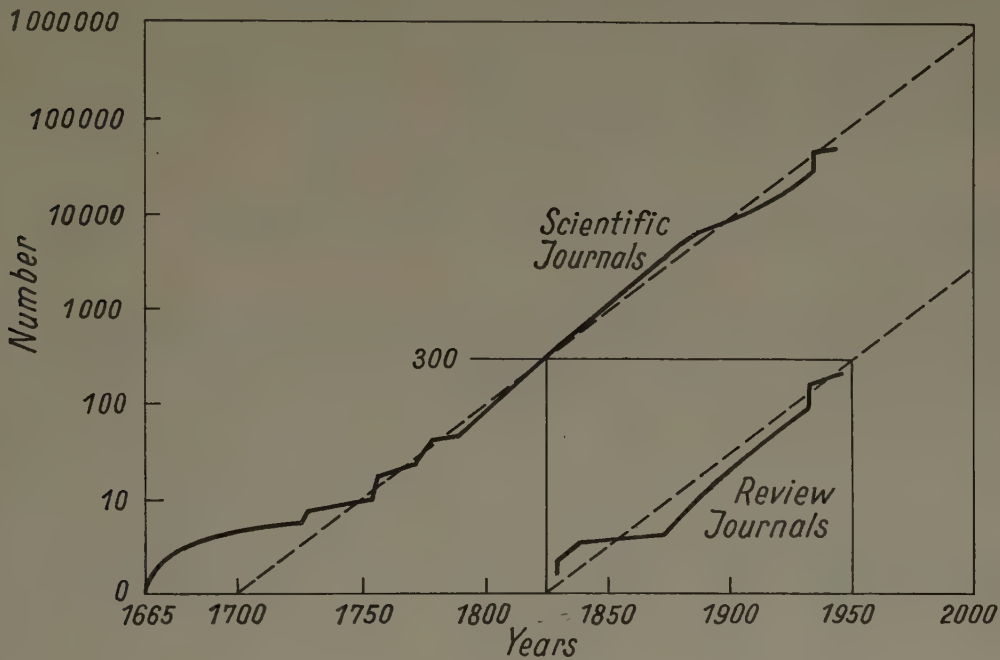


Fig. 2

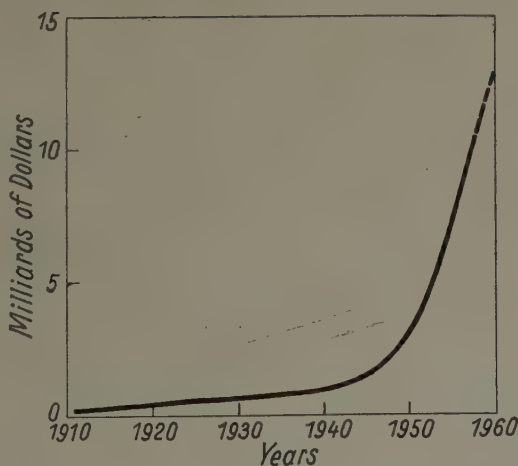


Fig. 3. Total Amount of Expenses for Research in the USA

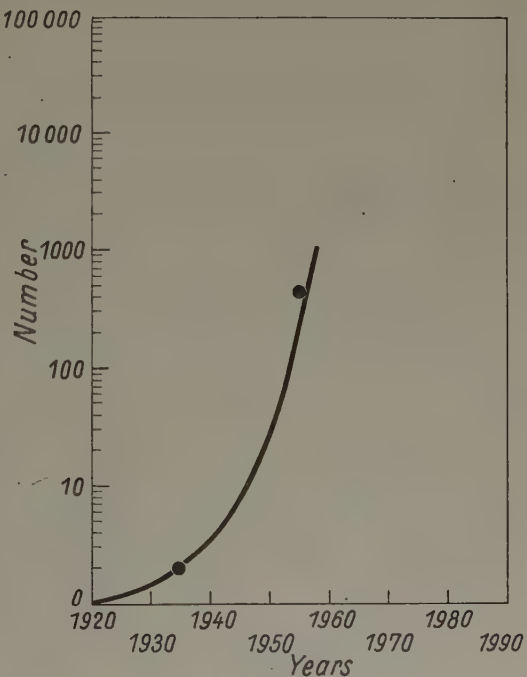


Fig. 4. Number of Technical Choices

Such studies have been made extensively by the Department of Defense in order to select the best mix of missiles to build or the best military aircraft.

Let me explain why such studies are becoming inescapable: it is due to the exponential growth of science and technology. It brings among industrial affairs increasing instability, more rapid obsolescent, a greater number of alternatives among which to choose, and last but not least an increasing penalty in case of a wrong decision. To give you an indication of the exponential growth of science knowledge, let me first turn to Fig. 2.

Scientific documents and scientific publications in the world, have doubled every 15 years, since the 18th century.

Parallel to that accumulation of printed human knowledge, more and more money is spent in research in every country, as indicated in Fig. 3, for the United States.

This exponential growth in knowledge and technology, brings an increasing instability in all industrial affairs, i. e. an enterprise faces difficult problems of investment due to the growing obsolescent of products (antibiotiques, cars, electronic equipment, synthetic textiles, etc.).

Furthermore, there is an increasing number of alternatives among which to choose (see Fig. 4: number of technical choices for a fighter).

Last but not the least, the penalty in case of a wrong decision is becoming greater and greater.

III. Problems of Collectivities

Since the time is running short, I shall turn to the last part of this conference, to show you some of the possibilities offered to O.R. studies in a very promising field: I mean the Problems of Collectivities.

As our concepts and methods have improved in effectiveness and generality we have ventured into problems of increasing scope and social significance. The importance of the economic, social and political effect of complex decisions which are taken every day at the Nation level and also the tremendous amount of money sometime involved are fundamental reasons for the increasing use of a scientific, precise and quantitative approach.

I will describe shortly one study, so you will be able to appreciate the broadness of the subject, and the mix of scientific techniques that is a characteristic of O.R. approach. The first one is related with the economic development of the city of Oran in Algeria.

In 1948, there was in Oran 300.000 inhabitants; in 1960, 450.000, and one can forecast that the number of 800.000 will be reached in 1975. You may imagine the enormous need in dwelling arising from this evolution, and the problem of building the right kind of accommodations is fundamental because if one makes a mistake there will be either a lot of unoccupied houses if they are not related to the amount of money that people can spend for rent, or occupation rate between two and five persons per room, which is not better.

So, the problem was to know what kind of dwelling will be needed in several years. To this problem must be applied:

- Demographical techniques to estimate the population growth,
- Sociological techniques to know how the population is split into families,
- Economic techniques to know the employment level of the active population in several years and the income repartition. This study implies a correct estimate of the components of the economic and industrial development not only of the town and the district, but in some cases of the country,
- Finally mathematic techniques, because, although the money is earned by individuals, the accommodations are occupied by the families and the relation between the distribution of the individuals and that of the families according to their size and income is very complex. The dynamic aspect of this relation is far more difficult to follow and a very elaborate mathematical model was build up, and simulation techniques extensively used.

Conclusion

In conclusion, I would say how great is my belief that a bright future is in front of us, that the fields in which O. R. can bring help to people who have to take important decisions are infinite; but we have to go on with our efforts, to improve our methods, to improve the coordination between all the people of various abilities and background who are convinced that the time has come to use to the greatest extent the powerful tools of our science.

Anschrift: Dr. CHARLES SALZMANN, Président du Centre Français de Recherche Opérationnelle, 126 BD Auguste-Blanqui, Paris

Stochastische Dimensionierung von Zwischenlagern

VON HERMANN WITTING

Betrachtet werden 2 Werke \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 , von denen \mathfrak{B}_2 die von \mathfrak{B}_1 produzierten Güter weiterverarbeitet. Damit sich die zufälligen Produktionsschwankungen des einen Werks nicht — oder nur selten — auf das andere auswirken, werde ein Zwischenlager \mathfrak{Z} angelegt. Für dieses wiederum werde eine Lagerhalle benötigt, und es interessiere deren optimale Kapazität c bei Berücksichtigung der Erstellungskosten der Lagerhalle, der Unterhaltungskosten des Lagers usw. einerseits und des zu erwartenden Verlusts durch Produktionsausfall auf Grund der erwähnten Zufallsschwankungen andererseits.

Fragestellungen, wie sie durch dieses Beispiel charakterisiert werden, sind in den verschiedensten Disziplinen von Bedeutung. So interessiert z. B. im Berg- und Hüttenwesen das Zusammenwirken von Förderstätte \mathfrak{B}_1 und Verarbeitung \mathfrak{B}_2 , im Fernmeldewesen die Dimensionierung von Nachrichtenvermittlungsanlagen \mathfrak{Z} usw. Auch beim Bau von Staudämmen treten ähnliche Fragen auf.

Wir beschränken uns auf das Lagerhallenproblem und betrachten zu dem Zweck den Inhalt von \mathfrak{Z} als eine Irrwanderung im Intervall $[0, c]$. Sei $U_n = X_n - Y_n$ die Differenz der zufallsabhängigen Produktionen von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 , und sei S_n der Lagerinhalt, jeweils während der n -ten Zeiteinheit. Dann ist $S_{n+1} = S_n + U_n$, solange dadurch die Kapazität von \mathfrak{Z} nicht überfordert wird. Genauer setzen wir

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n + U_n & \text{für } 0 < S_n + U_n < c, \\ c & \text{für } S_n + U_n \geq c, \\ 0 & \text{für } S_n + U_n \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

und machen die folgenden, bei random-walk-Modellen üblichen Annahmen:

- 1) Die U_n seien stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.
- 2) Die U_n haben eine von n unabhängige Verteilung $\mathfrak{B}(U)$.

Dann bilden die S_n einen MARKOW-Prozeß und die bedingte Verteilung $\mathfrak{B}(S_{n+1} | S_n)$ ist von n unabhängig und durch $\mathfrak{B}(U)$ bestimmt.

Wie in [1] näher ausgeführt wird, genügen die in der Praxis auftretenden Verteilungen $\mathfrak{B}(U)$ den Bedingungen dafür, daß eine von der Anfangsverteilung $\mathfrak{B}(S_0)$ unabhängige Limesverteilung $\mathfrak{B}(S)$ existiert, d. h. daß gilt $\mathfrak{B}(S_n) \rightarrow \mathfrak{B}(S)$. Dabei hängt $\mathfrak{B}(S)$ von c ab. Insbesondere streben die Wahrscheinlichkeiten $w(0)$ und $w(c)$ für die Randzustände $S = 0$ bzw. $S = c$, in denen die Produktion von \mathfrak{B}_2 bzw. \mathfrak{B}_1 reduziert werden muß, für $c \rightarrow \infty$ gegen 0. Wir können also $c = c(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so wählen, daß

$$w(0) \leq \varepsilon_1, \quad w(c) \leq \varepsilon_2 \quad (2)$$

wird. Bei der Wahl von c handelt es sich also um ein Optimumproblem, bei dem die beiden Kostenarten gegeneinander abzuwägen sind; der Verlust durch Produktionsausfall wird dabei gemäß (2) unabhängig davon bewertet, wie stark die mögliche Produktion unterschritten wird. Doch können die Überlegungen auch auf den Fall allgemeinerer Verlustfunktionen ausgedehnt werden. Für die geeignete Dimensionierung der Lagerhalle hat somit die praktische Berechnung der Lösung eine große Bedeutung. Insbesondere interessiert, wie $w(0)$ und $w(c)$ für $c \rightarrow \infty$ gegen 0 streben.

Speziell sei $\mathfrak{B}(U)$ eine stetige Verteilung mit der Dichte $g(x)$ und der Verteilungsfunktion $G(x)$. Dann hat das System für einen Übergang aus dem Zustand ξ , $0 \leq \xi \leq c$, in einen Innenzustand x , $0 < x < c$, die bedingte Dichte $g(x - \xi)$, und für einen Übergang in die Randzustände c bzw. 0 die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\int_c^\infty g(x - \xi) dx = 1 - G(c - \xi) = \tilde{G}(c - \xi) \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^0 g(x - \xi) dx = G(-\xi).$$

Ebenso hat die Limesverteilung eine Dichte $f(x)$ in $0 < x < c$ und diskrete Wahrscheinlichkeiten $w(0)$, $w(c)$ für die beiden Randzustände. $f(x)$, $w(0)$ und $w(c)$ ergeben sich als eindeutige Lösungen aus den durch die obigen Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmten Gleichungen

$$f(x) = \int_0^c g(x - \xi) f(\xi) d\xi + g(x) w(0) + g(x - c) w(c) \quad (3),$$

$$w(c) = \int_0^c \tilde{G}(c - \xi) f(\xi) d\xi + \tilde{G}(c) w(0) + \tilde{G}(0) w(c) \quad (4),$$

$$w(0) = \int_0^c G(-\xi) f(\xi) d\xi + G(0) w(0) + G(-c) w(c) \quad (5)$$

unter der Wahrscheinlichkeitsnormierung

$$\int_0^c f(x) dx + w(0) + w(c) = 1 \quad \dots \quad (6).$$

Dabei ist die Gleichung (5), und im Falle einer symmetrischen Dichte $g(x)$ auch die Gleichung (4), überzählig, so daß nur (3) unter (6) gelöst zu werden braucht.

Bezeichnet $F(x)$ die zugehörige Verteilungsfunktion mit $F(x) = 0$ für $x < 0$, $F(x) = 1$ für $x > c$, so lassen sich die Gleichungen (3) bis (6) zusammenfassen zur Integralgleichung

$$F(x) = \int_0^c G(x - \xi) dF(\xi) \quad \dots \quad (7),$$

wodurch auch der Zusammenhang unseres random-walk-Modells mit der Theorie der Warteschlangen ausgedrückt wird.

Exakte Lösungen lassen sich angeben für den Fall zweiseitiger Γ -Verteilungen

$$g(x) = \frac{\lambda^{n+1} |x|^n}{2n!} e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < +\infty \quad \dots \quad (8),$$

was hier näher ausgeführt werden soll, weil sich in methodisch ähnlicher Weise (nämlich durch Reihenentwicklungen der Form (9) und Diskussion der Gleichungssysteme für die Entwicklungskoeffizienten) auch für andere Verteilungen $\mathfrak{B}(U)$ der Grenzwertsatz (11) und (unter etwas einschränkenderen Voraussetzungen über $\mathfrak{B}(U)$) auch das asymptotische Verhalten (12) von $w(0)$ und $w(c)$ für $c \rightarrow \infty$ beweisen lassen; vgl. hierzu [1], wo der Fall diskreter Verteilungen $\mathfrak{B}(U)$, insbesondere der endlicher Gitterverteilungen, ausführlich dargestellt wird.

Unter (8) genügt nämlich $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung $(2n+2)$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine symmetrische Lösung sich angeben läßt zu

$$f(x) = k + \sum_{i=1}^n l_i (e^{-r_i x} + e^{-r_i(c-x)}) \quad \dots \quad (9).$$

Dabei sind die r_i die Einstellen der momenterzeugenden Funktion $E e^{rU}$ mit $\operatorname{Re} r_i > 0$, d. h. die (von 1 und untereinander verschiedenen) Lösungen der Gleichung

$$1 = \frac{\lambda^{n+1}}{2} \left[\frac{1}{(\lambda + r)^{n+1}} + \frac{1}{(\lambda - r)^{n+1}} \right]$$

mit $\operatorname{Re} r_i > 0$. (3) ergibt dann n homogene, (6) eine inhomogene lineare Gleichung für die Koeffizienten k, l_1, \dots, l_n , aus denen sie sich eindeutig berechnen. Da für $c \rightarrow \infty$ alle bei der CRAMERschen Regel auftretenden Determinanten VANDERMONDESche sind mit den Argumenten r_1, \dots, r_n bzw. 1, lassen sich leicht die folgenden asymptotischen Aussagen herleiten

$$kc \rightarrow 1, \quad l_i = O\left(\frac{1}{c}\right) \quad \dots \quad (10),$$

$$c f(c y) \rightarrow 1, \quad 0 < y < 1 \quad \dots \quad (11),$$

$$w(0) = w(c) = \frac{\gamma}{c} + o\left(\frac{1}{c}\right) \quad \dots \quad (12)$$

mit $\gamma = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n}{\lambda} > 0$. Anschaulich gesprochen besagt (11), daß alle Zustände (Zustand = Lagerinhalt) asymptotisch für $c \rightarrow \infty$ gleichwahrscheinlich sind, oder daß S/c für $c \rightarrow \infty$ asymptotisch die Wahrscheinlichkeitsdichte 1 in $[0, 1]$ hat. Für das Problem der Dimensionierung ist die Gültigkeit von (12) mit einem geeigneten, u. U. numerisch zu bestimmenden γ sehr wichtig, gerade in den Fällen, in denen die Lösung von (3), (4), (5) nur numerisch gewonnen werden kann.

Literatur

[1] H. WITTING, Optimale Kapazität von Lagerhallen, Unternehmensforschung 5 (1961).

Anschrift: Doz. Dr. H. WITTING, Institut für Angewandte Mathematik und Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DVL an der Universität, Freiburg i. Br., Hebelstraße 40

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4; Fernsprecher: 220441, Telex-Nr. 011773, Postscheckkonto: Berlin 35021. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/41/8. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15, zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Bezugspreis dieses Heftes: DM 26,50. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Druckgenehmigungs-Nr. 202-100/750/61 des Ministeriums für Kultur.

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

| | Seite | | Seite |
|--|-------|--|-------|
| J. Valenta: Ein Beitrag zur theoretischen Lösung der kurzen dickwandigen Kreiszylinderschale | 114 | H. Reichardt und W. Sattler: Ermittlung schwacher Druckdifferenzen in Strömungen mit Kavitation | 151 |
| H. Wenzel: Eine Integralgleichung für Beulprobleme | 116 | H. Schade: Zur Stabilitätstheorie axialsymmetrischer Parallelströmungen | 154 |
| J. Zawadzki: Die Analyse einiger Rheoeffekte bei der Beanspruchung von Stoffen | 118 | A. Slibar: Über die Strömung visko-plastischer Stoffe bei veränderlichen Stoffkennzahlen | 157 |
| W. Zottmann: Zum heutigen Stand des Wissens um die Beanspruchungen von Eisenbahnradern | 118 | I. Teipel: Zur Berechnung ebener Flatterluftkräfte mittels Charakteristikenverfahren | 158 |
| D. Strömungsmechanik | | C. Torre: Berechnung von Charakteristiken allgemeiner Kontinua | 159 |
| M. Fiebig: Das Verhalten der ähnlichen Grenzschichten mit Rückströmung bei gestörtem Profil | 126 | E. Truckenbrodt: Strömungsmechanische Probleme bei Hyperschallgeschwindigkeiten | 163 |
| Th. Ginsburg: Verhalten einer instationären Stoßwelle in einem Rohr | 129 | W. Velte: Beitrag zur Stabilität zäher Strömungen | 164 |
| J. Gruber: Ein Näherungsverfahren zur Berechnung von rotierenden Kreisgittern mit Berücksichtigung der Kompressibilität | 131 | W. Wuest: Kompressible laminare Grenzschichten bei Ausblasen eines anderen Mediums | 164 |
| M. Hackeschmidt: Der Entwurf aerodynamisch günstiger Gleichdruckgitterprofile nach dem Hodographenverfahren unter Verwendung der Elektroanalogie | 133 | J. Zierep: Die Überschallströmung um einen Flügel mit zwei Unterschallvorderkanten | 166 |
| G. Hämmerlin: Stabilitätsuntersuchungen kompressibler Grenzschichten längs konkaven Wänden | 135 | E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik | |
| K. Hasselmann: Über den nichtlinearen Energieaustausch innerhalb eines Seegangsspektrums | 137 | G. Bretschneider: Die Bedeutung von Monte-Carlo-Methoden für die Dimensionierung von Nachrichtenvermittlungsanlagen | 170 |
| E. Hölder: Stationäre rotationssymmetrische Strömung eines vollkommen leitenden Plasmas | 138 | E. Henze: Instationäre Irrfahrten im Gitter | 172 |
| F. Keune: Eine Summendarstellung der Singularitätenverteilungen zur Berechnung der Strömung an vorgegebenen Rotationskörpern bei Schräganströmung | 138 | P. Lorenz: Faktorentheorie, Konstitutionstheorie | 174 |
| E. Koppe: Experimenteller Nachweis von stetiger transsonischer Kompression in Gasströmungen | 139 | H. Störmer: Über das Testen von Verteilungshypothesen | 177 |
| E. Lanckau: Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung | 142 | W. Vogel: Bemerkungen zu einem sequentiellen Versuchsplan | 179 |
| A. Michalke: Theoretische und experimentelle Untersuchung einer rotationssymmetrischen laminaren Düsen-grenzschicht | 142 | F. Unternehmensforschung | |
| K. Nickel und W. Schönauer: Eine einfache experimentelle Methode zur Sichtbarmachung von Tollmien-Wellen und Görtler-Wirbeln | 145 | J. Heinhold: Die Anwendung des elektronischen Analogrechners in der linearen Optimierung | 182 |
| K. Oswatitsch: Iterationsverfahren zur Berechnung von Strömungen vom Wellenausbreitungstypus | 147 | Ch. Salzmann: Tendances actuelles de la recherche opérationnelle dans l'industrie et pour les collectivités .. | 187 |
| J. Raasch: Das Verhalten suspendierter Feststoffteilchen in Scherströmungen hoher Zähigkeit | 147 | H. Witting: Stochastische Dimensionierung von Zwischenlagern | 191 |

Der Inhalt dieses Sonderheftes unterliegt nicht der Verantwortung des Herausgebers. Die Aufteilung der Vorträge auf die Sachgebiete entspricht der Sektionseinteilung des Tagungsprogramms.

HERBERT BENZ

Über eine Bewertungstheorie der Algebren und ihre Bedeutung für die Arithmetik

(Schriftenreihe der Institute für Mathematik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 9)

1961. 149 Seiten — 5 Abbildungen — gr. 8° — DM 29,50

Für die Theorie der algebraischen Zahlen gibt es zwei wesentlich verschiedene Begründungsweisen, die idealtheoretische, die auf Dedekind zurückgeht, und die divisorentheoretische, die auf Grund der p -adischen Methode von Hensel entwickelt und dann durch die Bewertungstheorie von Ostrowski u. a. unterbaut wurde.

In dieser Arbeit wird eine konsequente divisorentheoretische Begründung der Arithmetik (der Maximalordnungen und auch anderer Ordnungen) einer algebraischen Algebra A gegeben und durch eine Bewertungstheorie unterbaut.

Das Buch ist so geschrieben, daß es auch von Nichtkennern der gewöhnlichen Bewertungstheorie gelesen werden kann.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N

Elektronisches Rechnen und Regeln

Herausgegeben von Hans Frühauf, Wilhelm Kämmerer, Helmut Winkler

Band 1

WILHELM KÄMMERER

Ziffernrechenautomaten

2. unveränderte Auflage 1960. VIII, 303 Seiten — 156 Abbildungen, davon 2 auf Falttafeln — zahlreiche Tabellen
gr. 8° — Lederin DM 29,—

Das Buch gibt eine zusammenfassende Darstellung des z. Zt. erreichten Standes auf dem Gebiet der programmgesteuerten Rechenautomaten. Der Stoff wurde dem Charakter eines Lehrbuches entsprechend nach didaktischen Gesichtspunkten ausgewählt, unter Berücksichtigung der neuesten Ergebnisse. Ausgehend von einer Einführung in die formale Logik werden die durch sie gegebenen Möglichkeiten einer Realisierung der arithmetischen Operationen entwickelt. Eine Erläuterung spezieller ausgewählter Rechenautomaten läßt Einblick in die typischen Baugruppen, ihre Arbeitsweise sowie in die verschiedenen Entwicklungstendenzen gewinnen. Das Buch ist in erster Linie für die Studierenden der mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Fachrichtungen an unseren Hoch- und Fachschulen bestimmt.

Band 2

HELMUT WINKLER

Elektronische Analogieanlagen

1961. X, 242 Seiten — 172 Abbildungen — gr. 8° — Lederin DM 29,—

In dem Band geht der Verfasser auf das Wesen und die Bedeutung von Analogien und Modellen ein und erläutert die Problemerkennung mittels Wirkschalbilder, Blockschalbilder, Strukturbilder und Koppelpläne, um letztthin analogieelektronische Lösungswege beschreiten zu können. Er gibt eine Einteilung der elektrischen Analogieanlagen, eine Zusammenstellung aller linearen und nicht-linearen Analogieelemente und beschreibt ihr Zusammenwirken. Ferner behandelt er systematisch und ausführlich die mannigfachen Anwendungen elektronischer Analogieanlagen mit dem Ziel, den Leser zum Einsatz analogieelektronischer Methoden auf seinem Spezialgebiet anzuregen, um den Fortschritt zu beschleunigen, Zeit und kostspielige Versuchsaufbauten zu sparen.

In dem zweiten Teil des Buches schildert der Autor die physikalische und technische Seite, die Entwicklungs- und Konstruktionsmerkmale der elektronischen Analogieanlagen, ihre Analogieelemente und Baugruppen: Operationsverstärker und elektrische Netzwerke als lineare Analogieelemente, nichtlineare Analogieelemente und Funktionsempfänger, Hilfs- und Zusatzeinrichtungen wie Meßwandler für den Simulationsbetrieb und schließlich Typenbeispiele kompletter elektronischer Analogieanlagen. Abschließend vermittelt er einen historischen Überblick. Besonders hervorzuheben ist der im Anhang gegebene sehr umfangreiche Literaturnachweis, der das einführende Werk wertvoll ergänzt.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten



A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N